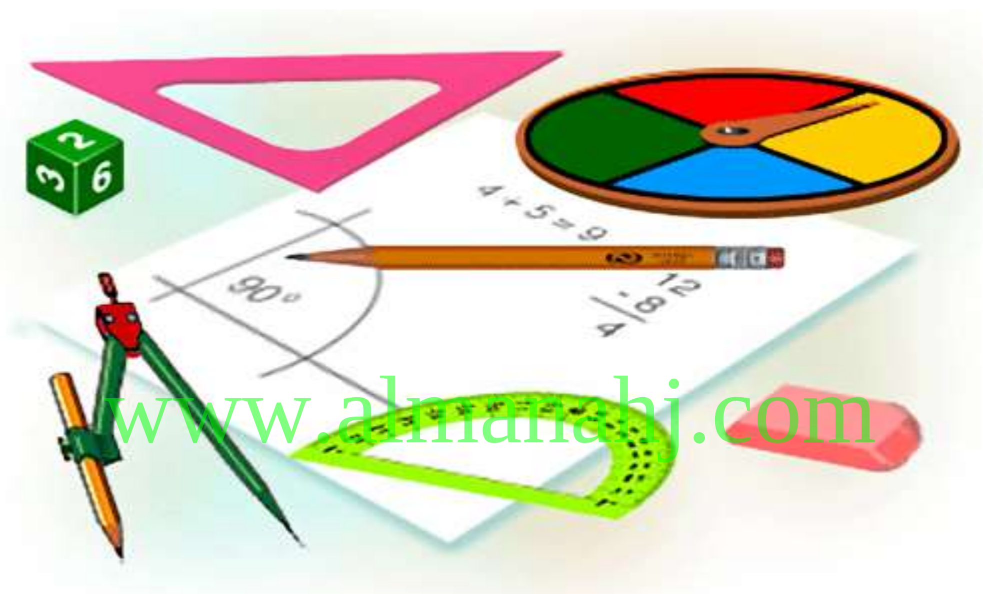
مدرسة خليفة بن زايد للتعليم الثانوي

فن الرياضيات

HILAL



111 مثال محلول

(النهايات)

الصف الثاني عشر العلمي

اعداد:أ.هلال حسين أحمد

HILAL

أوجد النهايات التالية

$(1)\ \lim_{x\to 1}(x^2-x+1)=1^2-1+1=1$

$(2)\ \lim_{x\to 0}(x^2-3x+5)=0^2-3\times 0+5=5$

$(3)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x+1}{x+1}\right)=\frac{1^2+2\times 1+1}{1+1}=\frac{4}{2}=2$

$(4)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{4+x}{3+x}\right)=\frac{4+3}{3+3}=\frac{7}{6}$

$(5)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+4x+3}{x+3}\right)=\frac{3^2+4\times 3+3}{3+3}=\frac{9+12+3}{6}=\frac{24}{6}=4$

$(6)\ \lim_{x\to -4}(x+3)^{1998}=\left(\lim_{x\to -4}x+\lim_{x\to -4}3\right)^{1998}=(-4+3)^{1998}=(-1)^{1998}=1$

$(7)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} ln(sin\,x)=ln\,sin\frac{\pi}{2}=ln\,1=0$

$(8)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16^2}\right)=\left(\frac{5\times 1^3+8\times 1^2}{3\times 1^4-16^2}\right)=\frac{5+8}{3-256}=\frac{13}{-253}=-\frac{13}{253}$

$(9)\ \lim_{x\to 2}3x^2(2x-1)=3\times 2^2(4-1)=12\times 3=36$

$(10)\ \lim_{x\to 3}\left(2x^2+\frac{1}{x}+4\right)=2\times 3^2+\frac{1}{3}+4=2\times 9+\frac{1}{3}+4=18+\frac{1}{3}+4$
$=\frac{67}{3}$

بفرض أن : $\lim_{x\to4} g(x) = 3 , \lim_{x\to4} f(x) = 2$

(1) $\lim_{x\to4}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to4} f(x) + \lim_{x\to4} g(x) = 2+3 = 5$

(2) $\lim_{x\to4}(g(x)+3) = \lim_{x\to4} g(x) + \lim_{x\to4} 3 = 3+3 = 6$

(3) $\lim_{x\to4}(x.f(x)) = \lim_{x\to4} x \,.\, \lim_{x\to4} f(x) = 4\times2 = 8$

(4) $\lim_{x\to4}(g(x))^2 = \left(\lim_{x\to4} g(x)\right)^2 = 3^2 = 9$

(5) $\lim_{x\to4}\dfrac{g(x)}{f(x)-1} = \dfrac{\lim_{x\to4} g(x)}{\lim_{x\to4} f(x) - \lim_{x\to4} 1} = \dfrac{3}{2-1} = \dfrac{3}{1} = 3$

(6) $\lim_{x\to4}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to4} f(x) \,.\, \lim_{x\to4} g(x) = 2\times3 = 6$

(7) $\lim_{x\to4}(f(x)+x^2+5) =$

$\lim_{x\to4} f(x) + \lim_{x\to4} x^2 + \lim_{x\to4} 5 = 2+4^2+5 = 2+16+5 = 23$

أوجد النهايات التالية مع ذكر السبب

(1) $\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x}=0$ (لأن الدالة معرفة فى جوار ايسر للعدد 1)

(2) $\lim_{x\to2^+}\sqrt{x-2}=0$ (لأن الدالة معرفة فى جوار ايمن للعدد 2)

(3) $\lim_{x\to3^+}\sqrt{3-x}=$ غير موجودة (لأن الدالة غير معرفة فى جوار ايمن للعدد 3)

(4) $\lim_{x\to1}\frac{1}{2+\sqrt{x+3}}=\frac{1}{2+\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

(5) $\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x}=0$ (لأن الدالة معرفة فى جوار ايسر للعدد 1)

(6) $\lim_{x\to6^+}\sqrt{x-6}=0$ (لأن الدالة معرفة فى جوار ايمن للعدد 6)

(7) $\lim_{x\to3}\sqrt{3-x}=$ غير موجودة (لأن الدالة غير معرفة فى جوار ايمن للعدد 3)

(8) $\lim_{x\to1}\frac{1}{2+\sqrt{x+3}}=\frac{1}{2+\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

(9) $\lim_{x\to4^+}\sqrt{16-x^2}=$ غير موجودة (لأن الدالة غير معرفة فى جوار ايمن للعدد 4)

(10) $\lim_{x\to4^-}\sqrt{16-x^2}=0$

(11) $\lim_{x\to-2^-}\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{4+6+2}=\sqrt{12}$

(12) $\lim_{x\to2}\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt[3]{8}=2$

مع تحياتي أ.هلال حسين

(13) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=$

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$

(14) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=$

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{3}$

(15) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+3}{x+2}=$

$\frac{0-0+3}{0+2}=\frac{3}{2}$

(16) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=$

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

(17) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=$

$\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=-4$

(18) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\frac{2}{1}=2$

(19) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{6}$

(20) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1}=$

$\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x+1)}=-1$

(21) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

(22) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-2x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0$

(23) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{2x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{2(x-3)}=\frac{27}{2}$

$$(24)\ \lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2+x-2)(2+x+2)}{x}=\frac{4}{1}=4$$

$$(25)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x-2\cos x)}{\sin x}=\frac{0-2}{1}=-2$$

[إرشاد : $\sin 2x=2\sin x\cos x$]

$$(26)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

[إرشاد : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$]

$$(27)\ \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

$$(28)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)}=\sqrt{4}+2=4$$

$$(29)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{(x-3)(x+1)}\times\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2-1}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x-2}+1)}=\frac{1}{4\times 2}=\frac{1}{8}$$

$$(30)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

$$(31)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)}\times\frac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)}{(x+3-4)}\times\frac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{1}\right)=2+2=4$$

$$(32)\ \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{(x-7)}\times\frac{\left(\sqrt{x+2}+3\right)}{\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 7}\left(\frac{x+2-9}{(x-7)}\times\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}\right)=\frac{1}{6}$$

$$(33)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-2)(x-1)}\times\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-2)(x-1)}\times\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$(34)\ \lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{\left(\sqrt{x}-2\right)}\times\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)}=4(4)=16$$

$$(35)\ \lim_{x\to2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{2x.(x-2)}=-\frac{1}{4}$$

$$(36)\ \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x+1-2}{2(x+1)}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2(x+1).(x^2-1)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2(x+1).(x-1)(x+1)}=\frac{1}{8}$$

$$(37)\ \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2-2-x}{2(2+x)}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{2x(2+x)}=-\frac{1}{4}=$$

$$(38)\ \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{4-4-x}{4(x+4)}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{4x(x+4)}=-\frac{1}{16}=$$

$$(39)\ \lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{4}{4-x^2}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{4}{(2-x)(2+x)}\right)=$$

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{2+x-4}{(2-x)(2+x)}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x-2}{(2-x)(2+x)}\right)=-\frac{1}{4}$$

مع تحياتي ....أ.هلال حسين

(40) لتكن : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2 - \sqrt{x+3}}$, $g(x) = \dfrac{1}{2 + \sqrt{x+3}}$

أوجد :(مفسراً إجابتك كل حالة)

$(i)\ \lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} \dfrac{1}{2+\sqrt{x+3}} = \dfrac{1}{4}$

$(ii)\ \lim_{x\to1} f(x).g(x) = \lim_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{2-\sqrt{x+3}} \times \dfrac{1}{2+\sqrt{x+3}}$

$= \lim_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{4-(x+3)} = \lim_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{4-x-3} = -\dfrac{2}{1} = -2$

(iii) هل يمكن إيجاد $\lim_{x\to-3} g(x)$ ؟ أعط تفسيراً لإجابتك

لا لأن الدالة غير معرفة فى جوار أيسر للعدد 3 –

(41) فى إحدي الدراسات على عيون القطط وجد أن قطر البؤبؤ $f(x)$ للقط يتناسب عكسياً مع شدة الإضاءة x التي تسقط على عينية وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{160x^{-0.04} + 90}{4x^{-0.04} + 15}$

أوجد نهاية قطر البؤبؤ عندما تسعي شدة الإضاءة x إلى الصفر

$\lim_{x\to0} \dfrac{160x^{-0.04} + 90}{4x^{-0.04} + 15}$ بالضرب ومقاما بسطا فى $x^{0.04}$

$\lim_{x\to0} \dfrac{160 + 90\ x^{0.04}}{4 + 15\ x^{0.04}} = \dfrac{160}{4} = 40$

مع تحياتي ....أ.هلال حسين

أوجد النهاية إن وجدت مفسراً إجابتك .

$$(42)\ \lim_{x\to2-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{2-x}{x-2}=-1 \qquad : |x-2|=2-x, x\le 2$$

$$(43)\ \lim_{x\to1+}\frac{|x-1|}{x^2+x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{3} \qquad : |x-1|=x-1, x\ge 1$$

$$(44)\ \lim_{x\to1+}\frac{|x+1|-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x+1-2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2} \qquad : |x+1|=x+1, x\ge -1$$

$$(45)\ \lim_{x\to2+}\frac{|x-1|-1}{2x-4}=\lim_{x\to2-}\frac{x-1-1}{2(x-2)}=\frac{1}{2} \qquad : |x-1|=x-1, x\ge 1$$

■ اشرح لماذا لايمكن استخدام التعويض المباشر لتحديد النهاية ثم أوجد النهاية إن وجدت .

لأن التعويض المباشر $\frac{0}{0}$

$$(46)\ \lim_{x\to2-}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{4} \qquad : |x-2|=-(x-2), x\le 2$$

دالة الصحيح : $y=[x]$ حيث $n\le x<n+1$

أوجد النهايات التالية :-

$(47)\ \lim_{x\to2-}[x]=1$ $(48)\ \lim_{x\to2+}[x]=2$

$(54)\ \lim_{x\to\frac{1}{2}}[x]=\left[\frac{1}{2}\right]=0$

$(49)\ \lim_{x\to2-}[x-1]=\lim_{x\to2-}([x]-1)=1-1=0$ $\qquad (50)\ \lim_{x\to2+}[x-1]=2-1=1$

$(55)\ \lim_{x\to0+}[x]=0$ $(56)\ \lim_{x\to0-}[x]=-1$

$(51)\ \lim_{x\to0+}\frac{[x]}{x}=0$ $\qquad (52)\ \lim_{x\to0-}\frac{x}{[x]}=0$

$(57)\ \lim_{x\to0.01}[x]=[0.01]=0$

$(53)\ \lim_{x\to2-}x^2+2x-[x]=4+2\times2-1=8-1=7$

مع تحياتي ....أ.هلال حسين

أوجد النهاية إن وجدت مفسراً إجابتك

$$(58)\ \lim_{x\to 3-}\frac{x}{[x]}=\lim_{x\to 3-}\frac{x}{2}=\frac{3}{2}\qquad \because\ [x]=2\ ,x\to 3-$$

اشرح لماذا لايمكن استخدام التعويض المباشر لتحديد النهاية ثم أوجد النهاية إن وجدت.

لأن التعويض المباشر $\frac{0}{0}$

$$(59)\ \lim_{x\to 0+}\frac{2x([x]+3)}{x^2+x}=\lim_{x\to 0+}\frac{2x(0+3)}{x^2+x}=\lim_{x\to 0+}\frac{6x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0+}\frac{6x}{x(x+1)}=6$$

$$(60)\ \lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{|x|}-2[x]\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{x}-2\times 0\right)=1\quad :[x]=0\ ,|x|=x:x\to 0+$$

$$(61)\ \lim_{x\to 2+}(|x-2|+[x])=\lim_{x\to 2+}(x-2+2)=2\quad :[x]=2\ ,|x-2|=x-2:x\to 2+$$

$$(62)\ \lim_{x\to 7}\frac{x-7}{|x-6|-1}=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{x-6-1}=1\quad :|x-6|=x-6:x\to 7$$

$$(63)f(x)=\begin{cases}x^2+a & ,x<-1\\ 6 & ,x=-1\\ 2x-b & ,x>-1\end{cases}\quad ,\lim_{x\to -1}f(x)=2$$: إذا كانت $a\ ,b$ أوجد قيم الثابتين

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}2x-b=2\Rightarrow -2-b=2\Rightarrow b=-4$$

$$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}x^2+a=2\Rightarrow 1+a=2\Rightarrow a=1$$

مع تحياتي ....أ.هلال حسين

(64) $g(x)=\begin{cases}x^2-3 & ,x>a\\ -2x & ,x<a\end{cases}$ أوجد جميع قيم الثابت a التي تجعل $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودة

$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a-} g(x)$ لأن النهاية موجودة

$\lim_{x\to a+} x^2-3=\lim_{x\to a-} -2x \Rightarrow a^2-3=-2a \quad \Rightarrow a^2-3+2a=0$

$a^2+2a-3=0 \Rightarrow (a-1)(a+3)=0 \Rightarrow\therefore a=1 \ ,a=-3$

أوجد النهايات التالية :

(65) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5$

(66) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

(67) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}$

(68) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=2\times 1=2$

(69) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\times\frac{1}{2x+3}=\frac{4}{3}$

مع تحياتي ....أ.هلال حسين

$$(70)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\times\frac{\sin 4x}{x}\right)=4\times 4=16$$

$$(71)\ \lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin 3x}{2x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{5x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{\tan x}{x}}\right)=\frac{5+3}{2-1}=\frac{8}{1}=8$$

$$(72)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{5x}+\frac{\sin 2x}{5x}\right)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$$

$$(73)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right)=\frac{1}{1}=1$$

$$(74)\ \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 4x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3\sin 4x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}\right)=\frac{12}{3}=4$$

$$(75)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{x}}{2x-1}\right)=\frac{1}{-1}=-1$$

$$(76)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{1}\right)=1\times 0=0$$

مع تحياتي ....أ.هلال حسين

(77) $\lim_{x\to 0} x\csc x = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right) = \frac{1}{1} = 1$

(78) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right) = 1+1 = 2$

(79) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right) = \frac{1+2}{1} = 3$

(80) $\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x - x^2\cot x}{x\cot x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cos x - x\times\frac{x}{\tan x}}{\frac{x}{\tan x}}\right) = \frac{3-0}{1} = 3$

(81) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{|x|} - 2[x]\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x} - 2\times 0\right) = 1$

عندما $x\to 0^+ \Leftarrow |x| = x\,,[x] = 0$

(82) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{|x+1|-2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin kx} = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1-2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin kx} = \frac{5}{k}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\right) = \frac{5}{k} \Rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow k = 10$

عندم $x\to 1^+ \Leftarrow |x+1| = x+1$

$$(83)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x\cos 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 8x}{x}\times\cos 3x}{\frac{\sin 2x}{x}}\right)=\frac{8\times 1}{2}=4$$

باستخدام نظرية الإحاطة أوجد :

$(84)\ \lim_{x\to 0} x^2\sin x \quad \because -1\le \sin x\le 1 \quad \times x^2$

$$-x^2\le x^2\sin x\le x^2 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(-x^2)=0\ ,\lim_{x\to 0}(x^2)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}x^2\sin x=0$$

$(85)\ \lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x^2} \quad \because -1\le \sin\frac{1}{x^2}\le 1 \quad \times x^2$

$$-x^2\le x^2\sin\frac{1}{x^2}\le x^2 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(-x^2)=0\ ,\lim_{x\to 0}(x^2)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x^2}=0$$

$(86)\ \lim_{x\to 0} x\sin x \quad \because -1\le \sin x\le 1 \quad \times x$

لابد من تمييز حالتين

$x>0$

$\because -1\le \sin x\le 1 \quad \times x$

$-x\le x\sin x\le x \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(-x)=0$

$,\lim_{x\to 0}(x)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}x\sin x=0$

$x<0$

$\because -1\le \sin x\le 1 \quad \times x$

$-x\ge x\sin x\ge x \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(-x)=0$

$,\lim_{x\to 0}(x)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}x\sin x=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}x\sin x=0$$

$(87)\ \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} \quad \because -1\le \cos\frac{1}{x^2}\le 1 \quad \times x^2$

$$-x^2\le x^2\cos\frac{1}{x^2}\le x^2 \because \lim_{x\to 0}(-x^2)=0\ ,\lim_{x\to 0}(x^2)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}=0$$

$(88)\quad \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2}$ $\because -1 \le \cos\frac{1}{x^2} \le 1 \qquad \times\ \sqrt{x} > 0$

$$-\sqrt{x} \le \sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2} \le \sqrt{x} \because \lim_{x\to 0+}(-\sqrt{x}) = 0 , \lim_{x\to 0+}(\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2} = 0$$

أشرح هل يمكن تطبيق نهاية حاصل ضرب دالتين في إيجاد كلاً من :-

$(89)(i) \lim_{x\to 0} x^2 \sin x \quad , \qquad (ii) \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

ثم أوجد قيمة كل من النهايتين بخطوات تحليلية.

$(i) \lim_{x\to 0}(x^2 \sin x) = 0 \times \sin 0 = 0$ تعويض مباشر

$, \qquad (ii) \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$: الدالة غير معرفة عند $x = 0$ لذلك نطبق نظرية الإحاطة

$\because -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad \times x^2 \Rightarrow -x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \quad , \lim_{x\to 0}(x^2) = 0 \ \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

$(90)\ f(x) = 3 + x^2 \sin\frac{1}{x}$: إذا كانت $\qquad \lim_{x\to 0} f(x)$: استخدام نظرية الإحاطة في إيجاد

$\because -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \qquad \times x^2$

$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2\ (+3) \Rightarrow -x^2 + 3 \le 3 + x^2 \sin\frac{1}{x} \le 3 + x^2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x^2 + 3) = 3 \quad , \lim_{x\to 0}(3 + x^2) = 3 \ \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(3 + x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = 3$$

$(91) \lim_{x\to 0+} h(x)$: استخدام نظرية الإحاطة في إيجاد $\qquad h(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$: لتكن

$\because -1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \qquad \times\ \sqrt{x} > 0$

$$-\sqrt{x} \le \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \le \sqrt{x} \because \lim_{x\to 0+}(-\sqrt{x}) = 0 , \lim_{x\to 0+}(\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$$

لتكن $f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x}$: $2-x^2<f(x)<2+x^2+x^3$ صحيحة في فترة حول الصفر (92)

أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ بالطريقتين التاليتين : (i) استخدم نظرية الإحاطة .

$$\lim_{x\to 0}(2-x^2)=2,\lim_{x\to 0}(2+x^2+x^3)=2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=2$$

$$(ii)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\times\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x}\times\frac{(1+\cos x)}{1}=1\times 2=2$$

إذا كانت $(x^2-1)(x^2+1)\le(x-1)f(x)\le(x^2+2x-3)$ حيث $x\neq 1$ في الفترة $[-3,3]$ (92)

أوجد: $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$

بالقسمة علي $(x-1)$: $\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)}\le\frac{(x-1)f(x)}{(x-1)}\le\frac{(x^2+2x-3)}{(x-1)}$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)}=4,\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)}=4\Rightarrow\lim_{x\to 1+} f(x)=4$$

(93) إذا كانت $(\sin x+x)\le f(x)\le(x^2+2x)$ حيث $x\neq 0$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ أوجد : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

بالقسمة علي $(x-1)$: $\frac{(\sin x+x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{(x^2+2x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{x}\right)}{\frac{x}{x}}=2,\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$

(94) إذا كانت $|g(x)+4|\le 2(3-x)^4$ صحيحة لجميع قيم x أوجد: $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

$-2(3-x)^4\le g(x)+4\le 2(3-x)^4$.(إضافة -4) , $-2(3-x)^4-4\le g(x)\le 2(3-x)^4-4$

$$\lim_{x\to 3}(-2(3-x)^4-4)=-4,\lim_{x\to 3}(2(3-x)^4-4)=-4\Rightarrow\lim_{x\to 3} g(x)=-4$$

تدريب منزلي

أوجد كلاً من النهايات التالية :

$$1)\ \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+4}$$

$$2)\ \lim_{x\to 3} \frac{6-2x}{x^2-2x-3}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0} \frac{(4-x)^2}{x+2}$$

$$4)\ \lim_{x\to 2} \frac{2x-x^2}{x-2}$$

$$5)\ \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$$

$$6)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2+x-2}$$

$$7)\ \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+5}-\frac{1}{5}}{x}$$

$$8)\ \lim_{x\to 1^-} (x^3+1)^4$$

$$9)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x^2+x-3}$$

$$10)\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{x}-2}{2x-1}$$

$$11)\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$12)\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$$

$$13)\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{3x}-\sqrt{x+2}}$$

$$14)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$$

$$15)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$$

$$16)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{2x^2}$$

17) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \sin 5x}{\sin 2x}$

18) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x - 2\sin 3x}{x}$

19) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^2 - \sin 3x}{\sin 2x}$

20) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin 3x + \sin 4x}{4x + x^2 \sin x}$

21) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x - \sin 5x}{x \cos x - 2\sin 3x}$

22) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x^2 - x \sin x}{3x^2}$

23) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x + \sin x \sin 3x}{x^2}$

24) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}$

25) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sin(2x-10)}{x-5}$

26) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2 - 5x + 6}$

(2 إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>-1 \\ 4, & x\le -1 \end{cases}$$

أوجد

$$1)\lim_{x\to -1} f(x) \qquad 2)\lim_{x\to 0} f(x)$$

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{16-x^2}{x-4}, & x\ne 4 \\ 2, & x=4 \end{cases}$$

جد:

$$\lim_{x\to 4} f(x)$$

(3 إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>a \\ -2x, & x\le a \end{cases}$$

جد: مجموعة قيم a التي تجعل $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة.

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x<-1 \\ 6, & x=-1 \\ 2x-b, & x>-1 \end{cases}$$

وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)=2$ أوجد $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$

أوجد كلاً من النهايات التالية :

$1)\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{|x-5|-6}{x-11}$ $\quad 2)\lim\limits_{x\to \frac{-1}{5}}\dfrac{|x|}{x}$ $\quad 3)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-3|-2}{5-x}$

$4)\lim\limits_{x\to 0} x|x|$ $\quad 5)\lim\limits_{x\to 0} x[x]$ $\quad 6)\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{[x-2]}$

$7)\lim\limits_{x\to -2^-}([x]+3)$ $\quad 8)\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{[x]}$

$9)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+|x|-6}{2-x}$ $\quad 10)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-2x+1|}{x-1}$

باستخدام نظرية الإحاطة أوجد : $\lim\limits_{x\to 0}(5-x^2\cos\dfrac{1}{x})$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق ......أ.هلال حسين أحمد