almanahj.com موقع المناهج الإماراتية

# دراسة تمارين

## الدرس السابع ⇐ حل المعادلة التفاضلية

---

للصف الثاني عشر المتقدم / ف 3

---

إعداد م/ مهاب الموافي

---

Scanned by CamScanner

مثال ① ⇐ حل المعادلة ذات المتغيرات القابلة للفصل ←

$$y' = xy^2 - 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(y^2 - 2y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2 - 2y} = x\,dx$$

بأخذ التكامل ⇐

$$\int \frac{dy}{y^2 - 2y} = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{y(y-2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-2} = \frac{}{y(y-2)}$$

$$\Rightarrow 1 = A(y-2) + By$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 1 = -2A \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$y = 2 \Rightarrow 1 = 2B \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{-\frac{1}{2}}{y} + \frac{1/2}{y-2}\,dy = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|y-2| = \frac{x^2}{2} + C}$$

وهذا يسمى حل المعادلة التفاضلية



Scanned by CamScanner

مثال ②

$$y' = xy^2 - 2x^2y$$

$$y' = xy(y - 2x)$$

بالتالي معادلة غير قابلة للفصل

لأنه لا يمكن فصل x عن y وسنحلها بطريقة أخرى لاحقاً

---

مثال ③

$$y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}$$

$$\Rightarrow y^2 \frac{dy}{dx} = (x^2 + 7x + 3)\,dx$$

$$y^2\,dy = (x^2 + 7x + 3)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 3x + C$$

$$y^3 = x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3C$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3C}$$

وهذا يعد من حل المعادلة التفاضلية

---

ملاحظة مهمة ⇐ كل ما ظهر C ثابت كردة

وهكذا كل معادلة (نسمي هذه المعادلة)

# الحل العام للمعادلة التفاضلية #



Scanned by CamScanner

مثال (4) ⟸ حل ⟸ $y' = \frac{x^2+7x+3}{y^2}$ $y(0)=3$

نحل مثال (3)

⟸ نأخذ التكامل

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3C}$$

$x=0$ $y=3$ $\Rightarrow 3 = \sqrt[3]{3C}$

$27 = 3C \Rightarrow C = 9$

$$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 27}}$$

مثال (5) ⟸ حل $y' = \frac{9x^2 - \sin x}{\cos y + 5e^y}$ إذا $y(0)=\pi$

⟸ نكامل

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 - \sin x}{\cos y + 5e^y}$$

$$\Rightarrow [\cos y + 5e^y]\,dy = [9x^2 - \sin x]\,dx$$

$$\Rightarrow \sin y + 5e^y = \frac{9x^3}{3} + \cos x + C$$

$$\Rightarrow \sin\pi + 5e^{\pi} = 0 + 1 + C$$

$x=0$
$y=\pi$ نعوض

ثم نعوض $\boxed{C = 5e^{\pi} - 1}$



Scanned by CamScanner

بداية حل تمارين
الكتاب المدرسي



Scanned by CamScanner

* صور إذا كانت المعادلة التفاضلية قابلة للفصل أم لا

1) a) $y' = (3x+1)\cos y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (3x+1)\cos y$

$dy = (3x+1)\cos y\, dx$

$\frac{dy}{\cos y} = (3x+1)\,dx \Rightarrow$ قابلة للفصل

b) $y' = (3x+y)\cos y \Rightarrow$ غير قابلة للفصل

لأنه لا يمكن فصل x عن y

2) a) $y' = 2x(\cos y - 1) \Rightarrow$ قابلة للفصل

$\frac{dy}{dx} = 2x(\cos y - 1)\,dx$

$\frac{dy}{\cos y - 1} = 2x\,dx$

b) $y' = 2x(y-x) \Rightarrow$ غير قابلة للفصل



Scanned by CamScanner

3) a) $y' = x^2y + y\cos x \Rightarrow$ قابلة للفصل

$\Rightarrow y' = y(x^2 + \cos x)$

$dy = y(x^2+\cos x)\,dx$

$\frac{dy}{y} = (x^2+\cos x)\,dx$

---

b) $y' = x^2y - x\cos y$ غير قابلة للفصل

$y' = x[xy - \cos y]$

---

4) a) $y' = 2x\cos y - xy^3 \Leftarrow$ قابلة للفصل

$\frac{dy}{dx} = x[2\cos y - y^3]$

$\frac{dy}{2\cos y - y^3} = x[2\cos y - y^3]\,dx$

$\frac{dy}{2\cos y - y^3} = x\,dx$

---

b) $y' = x^3 - 2x + 1$ قابلة للفصل

$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 2x + 1)\,dx$



Scanned by CamScanner

* أوجد الحل العام بصيغة صريحة إن أمكن

5 $y' = (x^2+1)\,y$

$$\frac{dy}{y} = (x^2+1)\frac{y}{y}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \int (x^2+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x + C$$

$$\Rightarrow y = e^{\frac{x^3}{3}+x+C}$$

6 $y' = 2x(y-1)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y-1)\,dx$$

$$\frac{dy}{y-1} = 2x\,dx$$

$$\ln|y-1| = \frac{2x^2}{2} + C$$

$$y-1 = e^{x^2+C}$$

$$y = e^{x^2+C} + 1$$

7

Scanned by CamScanner

7

$$y' = 2x^2 y^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 2x^2 dx$$

$$\Rightarrow y^{-2} dy = 2x^2 dx$$

$$-y^{-1} = \frac{2x^3}{3} + C$$

$$y^{-1} = -\frac{2}{3}x^3 - C$$

$$\boxed{y = \frac{1}{-\frac{2}{3}x^3 - C}} = -\left(\frac{1}{\frac{2}{3}x^3 + C}\right)$$

8

$$y' = 2(y^2+1)$$

$$\Rightarrow dy = 2(y^2+1)dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int 2\,dx$$

$$\text{Tan}^{-1}(y) = 2x + C$$

$$\Rightarrow y = \text{Tan}(2x + C)$$



Scanned by CamScanner

9 $y' = \frac{6x^2}{y(1+x^3)}$

$\Rightarrow y\,dy = \frac{6x^2}{y(1+x^3)}\,dx \cdot y$

$\Rightarrow \int y\,dy = \frac{6}{3}\int \frac{6x^2}{1+x^3}\,dx$

$\frac{y^2}{2} = 2\ln|1+x^3| + C$

$y^2 = 4\ln|1+x^3| + 2C$

$y = \pm\sqrt{4\ln|1+x^3| + 2C}$

10 $y' = \frac{3x}{y+1}$

سعاد

اعتماد على النفس

عزيزي الطالب



Scanned by CamScanner

11 $y' = \frac{2x}{y} e^{y-x}$

باستخدام خواص الأسس

$e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{e^y}{e^x}$

$\Rightarrow dy = \frac{e^y}{y} \cdot \frac{2x}{e^x} dx$

$\Rightarrow \frac{y}{e^y} dy = \frac{2x}{e^x} dx$

$\Rightarrow \int y e^{-y} dy = \int 2x e^{-x} dx$

وباستخدام التكامل بالأجزاء

| $y$ | $e^{-y}$ |
|---|---|
| $1$ | $-e^{-y}$ |
| $0$ | $+e^{-y}$ |

| $2x$ | $e^{-x}$ |
|---|---|
| $2$ | $-e^{-x}$ |
| $0$ | $+e^{-x}$ |

$\Rightarrow -y e^{-y} + 1(-e^{-y}) = -2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$

$\Rightarrow e^{-y}[-y-1] = e^{-x}[-2x-2] + C$

وهذه الصورة النهائية لحل المعادلة التفاضلية



Scanned by CamScanner

12 $y' = \frac{\sqrt{\quad}}{x \ln x}$

$$dy = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

$$\sin^{-1}(y) = \ln |\ln x| + C$$

$$\Rightarrow y = \sin \left[ \ln |\ln x| + C \right]$$

13 $y' = \frac{\cos x}{\sin y}$

$$dy = \frac{\cos x}{\sin y} \cdot dx$$

$$\int \sin y \, dy = \int \cos x \, dx$$

$$-\cos y = \sin x + C$$

$$\cos y = -\left[ \sin x + C \right]$$

$$\Rightarrow y = \cos^{-1}(-\sin x - C)$$

11 1

Scanned by CamScanner

14 $y' = x \cos^2 y$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = x \cancel{\cos^2 y}\, dx$$

$$\Rightarrow \cancel{\sec^2 y}\, dy = x\, dx$$

$$\tan y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\left[\frac{x^2}{2} + C\right]$$

15 $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$

سعلة بدأ
اتحدى نفسك
لو سمحت

12

Scanned by CamScanner

16 $y' = \frac{2}{xy + y}$

$y \cdot dy = \frac{2}{y(x+1)} dx \cdot y$

$\int y\,dy = \int \frac{2}{x+1} dx$

$\frac{y^2}{2} = 2\ln|x+1| + C$

$y^2 = 4\ln|x+1| + 2C$

$y = \pm\sqrt{4\ln|x+1| + 2C}$

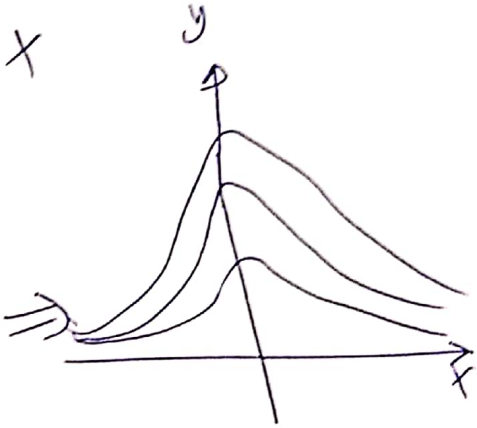
---

17 $y' = -xy$

$\frac{dy}{y} = -\frac{xy\,dx}{y} = -x\,dx$

$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$y = e^{\frac{-x^2}{2} + C}$




Made Table ثم رسم الدالة بابتدام

وذلك بإعطاء قيم حقيقة للثابت

C=1

C=2

C=3

وترسم الدالة فرادى لكل قيمة حقيقة

13 6

Scanned by CamScanner

18 $y' = \frac{-x}{y}$

$\Rightarrow dy = \frac{-x}{y} dx$

$y\,dy = -x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + C$

$y^2 = -x^2 + 2C$

$y = \pm\sqrt{-x^2+2C}$

نأخذ قيم مختلفة لـ C ثم نعوض في المعادلة ونحسبها

ModeTable

ونرسم بالبدء

$C=1$ / $C=2$ / $C=3$

---

19 $y' = \frac{1}{y}$

$dy = \frac{1}{y} dx$

$y\,dy = dx$

$\frac{y^2}{2} = x + C$

$y^2 = 2x + 2C$

$y = \pm\sqrt{2x+2C}$

ونتبع الطريقة نأخذ $C=1$ ثم نرسم

$C=2$

$C=3$

14

Scanned by CamScanner

20 $y' = 1 + y^2$

$$dy = (1+y^2)\,dx$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$

$$\tan^{-1} y = x + C$$

$$y = \tan(x+C)$$

ثم نأخذ قيم لـ $C=1$ $C=2$ $C=3$

نحصل على عائلة من المنحنيات

---

21 $y' = 3(x+1)^2 y$ حيث $y(0)=1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = 3(x+1)^2 dx$$

$$\ln|y| = \frac{3(x+1)^3}{3} + C$$

$x=0$ $y=1$ $\Rightarrow \ln|1| = 1 + C \Rightarrow C=-1$

$$\ln|y| = (x+1)^3 - 1$$

$$y = e^{(x+1)^3 - 1}$$



Scanned by CamScanner

22 $y' = \frac{x-1}{y^2}$ $y(0)=2$

$dy = \frac{x-1}{y^2}dx$

$y^2 dy = (x-1)dx$

$\frac{y^3}{3} = \frac{(x-1)^2}{2} + C$

$x=0$ $y=2$ $\Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} - \frac{8}{3}$

$\Rightarrow C = \frac{-13}{6}$

$\Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{13}{6}$

$y^3 = \frac{3(x-1)^2}{2} - \frac{13}{2}$

$\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3(x-1)^2}{2} - \frac{13}{2}}$

23 $y' = \frac{4x^2}{y}$ $y(0)=2$

$\Rightarrow dy = \frac{4x^2}{y}dx$

$\int y\,dy = \int 4x^2 dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{4x^3}{3} + C$

$x=0$ $y=2$ $\Rightarrow 2 = 0 + C \Rightarrow C=2$

$\frac{y^2}{2} = \frac{4x^3}{3} + 2 \Rightarrow y^2 = \frac{8}{3}x^3 + 4$

$y = \pm\sqrt{\frac{8}{3}x^3 + 4}$

16

Scanned by CamScanner

24 $y' = \frac{x-1}{y}$ $y(0) = -2$

اختصار لشكله
علشان سهل

8/ مبروك الاجازة

25 $y' = \frac{4y}{x+3}$ $y(-2) = 1$

اختصار لشكله
علشان جاي



Scanned by CamScanner

26 $y' = \frac{3x}{4y+1}$ $y(1) = 4$

اعتذر بشدة عن سهوة بدر

---

27 $y' = \frac{4x}{\cos y}$ $y(0) = 0$

$$dy = \frac{4x}{\cos y}\,dx$$

$$\cos y\,dy = 4x\,dx$$

$$\sin y = \frac{4x^2}{2} + C$$

$x=0$ $y=0$ $\Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

$$\sin y = 2x^2 \Rightarrow y = \sin^{-1}(2x^2)$$



واعداد م/ ضياء الطوافي

Scanned by CamScanner

28 $y' = \frac{\tan y}{x}$ $\quad y(1) = \frac{\pi}{2}$

$$dy = \frac{\tan y}{x} dx$$

$$\frac{dy}{\tan y} = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|\sin y| = \ln|x| + C$$

$x = 1$ $\quad y = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \ln|1| = \ln|1| + C \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \ln|\sin y| = \ln|x|$$

$$\sin y = e^{\ln|x|} = |x| = x$$

$$\boxed{y = \sin^{-1}(x)}$$

19

الشكل العام للمعادلة اللوجستية هي ⟸

$$y = \frac{AM\, e^{kMt}}{1 + A\, e^{kMt}}$$

وهذه المعادلة لها قيمة عظمى $M = 1000$

حيث (K) ⟸ هي معدل النمو الكاني

(A) ⟸ ثابت ، (t) الزمن

---

مثال (6) ⟸ إذا كانت $M = 1000$ القيمة العظمى

معدل النمو $k = 0.0007$

أوجد معادلة تمثل النمو الكاني للمجتمع في أي زمن $t$

لمجتمع كاني ابتدائي $y(0) = 350$ وبفرضية النمو اللوجستي

∵ معادلة النمو اللوجستي هي ⟸

$$y = \frac{AM\, e^{kMt}}{1 + A\, e^{kMt}}$$

$$350 = \frac{A(1000)\, e^{0.0007(1000)(0)}}{1 + A\, e^{0.0007(1000)(0)}} \Rightarrow 350 = \frac{1000A}{1+A}$$

$$\Rightarrow 350 + 350A = 1000A$$

$$\frac{350}{650} = \frac{650A}{650}$$

$$\frac{7}{13} = A$$

$$y = \frac{\frac{7}{13}(1000)\, e^{7t}}{1 + \frac{7}{13} e^{7t}}$$ ⟸

.20

Scanned by CamScanner

باستذكار المعادلة اللوجستية لفولكان

$$\boxed{y' = ky(M-y)}$$

29 $\quad y' = 3y(2-y) \qquad y(0)=1$

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة اللوجستية

$\Rightarrow \boxed{k=3} \quad \boxed{M=2}$

والحل العام لها $\Leftarrow$

$$y = \frac{A M e^{kMt}}{1 + A e^{kMt}}$$

وبتعويض الشرط $y(0)=1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{A(2)\, e^{6(0)}}{1 + A\, e^{6(0)}}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{2A}{1+A} \Rightarrow 2A = 1+A \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{2e^{6t}}{1+e^{6t}}}$$

21

Scanned by CamScanner

30 $y' = y(3-y)$ $\quad y(0)=2$

بالمقارنة بالصيغة اللوجستية $y' = ky(M-y)$

$\Rightarrow k=1$ $\quad M=3$ $\quad \Rightarrow kM=3$

بالتعويض بكل هذه المعلومات في الصورة العامة

$$y = \frac{AMe^{kMt}}{1+Ae^{kMt}}$$

$$2 = \frac{A(3)}{1+A} \Rightarrow 3A = 2A+2$$

$A=2$

$$y = \frac{2(3)e^{3t}}{1+2e^{3t}}$$

31 $y' = 2y(5-y)$

$k=2$ $\quad M=5$ $\quad y(0)=4$

احتمال تسأل سؤال مباشر

اعداد P/ صابر الطوانسي



Scanned by CamScanner

أرقام (34) (33) (32)

تمرين (31) (30) اختياري تحليلي

35

$$y'(t) = ry(t)\left[1 - \frac{y}{M}\right]$$

a) أثبت أنها تكافئ المعادلة $\frac{1}{y(M-y)}\, y' = k$ حيث $k = \frac{r}{M}$

(الكل)

$$y' = ry\left[\frac{M-y}{M}\right] = \frac{r}{M}\, y(M-y)$$

$$y' = ky(M-y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y'}{y(M-y)} = k}$$

b) $r = 0.71$ ، $M = 8 \times 10^7\ kg$

$$y(0) = 2 \times 10^7\ kg$$

$y(t)$ = كتلة الأرصدة البيولوجية للعلبون في أي زمن

$M$ = القيمة العظمى لكتلة الأرصدة البيولوجية للعلبون

23

Scanned by CamScanner

وباستخدام أول الثوابت للمعادلة نجد

$$y(t) = \frac{AM\, e^{Mkt}}{1 + A\, e^{Mkt}} \Rightarrow Mk = r$$

بالتعويض نحصل على المعادلة

$$y(t) = \frac{A(8\times10^7)\, e^{0.7t}}{1 + A\, e^{0.7t}}$$

ولإيجاد A نستخدم الشرط الابتدائي

$$y(0) = 2\times10^7$$

$$\Rightarrow 2\times10^7 = \frac{A(8\times10^7)}{1+A}$$

$$\Rightarrow 2\times10^7 + 2\times10^7 A = A(8\times10^7)$$

$$2 + 2A = 8A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\frac{1}{3}\times8\times10^7\, e^{0.7t}}{1 + \frac{1}{3} e^{0.7t}}$$

ج) والآن نوجد الزمن الذي ستستغرقه الكتلة الحيوية للحصول على مقدار 10% من القدرة الاستيعابية

$M - 10\%\, M$ ⟵ $t = \dots\dots$ ⟵ $y(t) = 0.1 = 10\%$

$y(t) = 90\%\, M$ ⟵ $M =$ القيمة القصوى ∴



Scanned by CamScanner

$$\therefore y(t) = \frac{\frac{1}{3} \times 8 \times 10^7 \; e^{0.71t}}{1 + \frac{1}{3} \; e^{0.71t}}$$

$$\Rightarrow 0.9 \times 8 \times 10^7 = \frac{\frac{1}{3} \times 8 \times 10^7 \; e^{0.71t}}{1 + \frac{1}{3} \; e^{0.71t}}$$

وحل هذه المعادلة نحصل على $t = 4.64$

---

باستثناء المعادلة 36

$$y(t) = \frac{M A \; e^{Mkt}}{1 + A \; e^{Mkt}}$$

هو حل المعادلة

$$y' = ky(M - y)$$

وبما أن $y > M \Leftarrow y - M > 0 \Leftarrow M - y < 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky(M - y)\,dt$$

$$\frac{dy}{y(M - y)} = -k\,dt$$

$$\Rightarrow \left| \ln \left| \frac{y}{M - y} \right| \right| = -kt$$

$$\Rightarrow \frac{y}{M - y} = e^{-kt}$$

25 27

Scanned by CamScanner

$y' = ky(M-y)$ ← حل المعادلة 36

$\frac{y}{M-y} = Ae^{kMt}$ نحاول العودة

وكنا نلاحظ $y > M \Leftarrow y - M > 0 \Leftarrow M - y < 0$

$$\Rightarrow \frac{y}{M-y} = -Ae^{kMt}$$

$$\Rightarrow y = -A(M-y)e^{kMt}$$

$$\Rightarrow y = [-AM + Ay]e^{kMt}$$

$$y = -AMe^{kMt} + Aye^{kMt}$$

$$y - Aye^{kMt} = -AMe^{kMt}$$

$$\frac{y[1 - Ae^{kMt}]}{1 - Ae^{kMt}} = \frac{-AMe^{kMt}}{1 - Ae^{kMt}}$$

$$y = \frac{-AMe^{kMt}}{1 - Ae^{kMt}}$$



Scanned by CamScanner

$$y = \frac{-AM\,e^{kMt}}{1 - Ae^{kMt}}$$

باستخدام الصيغة b

وباستخدام الشرط الابتدائي

$$y(0) = 3\times10^{8} \qquad M = 8\times10^{7}$$

$$\Rightarrow 3\times10^{8} = \frac{-AM}{1-A}$$

$$\Rightarrow 3\times10^{8} = \frac{-A\times 8\times10^{7}}{1-A}$$

$$A = 1.36$$

ولايجاد الزمن الذي يستغرقه للحصول على 10% من الكمية الابتدائية

$$\Rightarrow 10\%M + M = 1.1M$$

$$\Rightarrow (1.1)(8\times10^{7}) = \frac{-1.36(8\times10^{7})\,e^{0.71t}}{1 - 1.36\,e^{0.71t}}$$

وبحل المعادلة نحصل على

$$t = 2.94$$

حيث $kM = r = 0.71$



Scanned by CamScanner

# دراسة استراتيجية الاستثمار

المعادلة التي تعطي الاستثمار بعد (t) سنة هي

$$\frac{dA}{dt} = rA + d$$

حيث (r) ← هو معدل الفائدة المكتسبة

(d) ← معدل الإيداع

A(t) ← هو المبلغ المودع في الحساب بعد t سنة

---

مثال (2): الفائدة السنوية $r = 8\%$ مركبة مستمرة

معدل الإيداع $d = 2000$

والمطلوب: حجم الاستثمارات الابتدائية ← $A(0) = x$

حيث $A(20) = 1000000$

الحل

باستخدام معادلة الاستثمار ← $\frac{dA}{dt} = rA + d$

$$\frac{dA}{dt} = 0.08A + 2000$$

وحل المعادلة التفاضلية ← تابع



Scanned by CamScanner

$$dA = (0.08A + 2000)\,dt$$

$$\int \frac{dA}{0.08A + 2000} = \int dt$$

$$\frac{1}{0.08} \ln|0.08A + 2000| = t + C$$

وبما بقدام الشرط

$$A(20) = 1000000$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08} \ln|0.08(1000000) + 2000| = 20 + C$$

$$\Rightarrow C = 121.9 \simeq 122$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08} \ln|0.08A + 2000| = t + 122$$

وشرط لإيجاد حجم المستطيل الابتدائي $t = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08} \ln|0.08A + 2000| = 122$$

$$\Rightarrow A = 191582.895$$



Scanned by CamScanner

باستبدال معادلة الاستثمار

$$\frac{dA}{dt} = rA + d$$

$$d = 2000$$
$$r = 6\% = 0.06$$
$$A(20) = 1000000$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.06A + 2000$$

وبحل المعادلة التفاضلية

$$\Rightarrow \int \frac{dA}{0.06A + 2000} = \int dt$$

$$\frac{1}{0.06} \ln|0.06A + 2000| = t + C$$

وباستبدال الشرط $A(20) = 1000000$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.06} \ln|0.06(1000000) + 2000| = 20 + C$$

$$\Rightarrow C = 163.9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.06} \ln|0.06A + 2000| = t + 163.9$$

ولإيجاد حجم الاستثمار نوجد $A(0) =$ ..... الابتدائي

$$\Rightarrow \frac{1}{0.06} \ln|0.06A + 2000| = 163.9$$

$$A = 277623.91$$

وهذا الاستثمار الابتدائي أكبر من الموجود في مثال (7.7) حيث نسبة الفائدة أصغر



Scanned by CamScanner

b

$r = 6\% = 0.06$

$A(20) = 1000000$

$A(0) = 10000$

$d = \dots$ معدل الاستهلاك

معادلة الاستهلاك

$$\frac{dA}{dt} = rA + d$$

وحل المعادلة التفاضلية

$$\Rightarrow \frac{dA}{rA+d} = dt$$

$$\frac{1}{r}\ln|rA+d| = t + C$$

وباستخدام الشرط

$y(t_1) = m$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\ln|rm+d| = C + t_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\ln|rA+d| = t_1 + \frac{1}{r}\ln|rm+d|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\cdot\ln\frac{rA+d}{rm+d} = t_1$$

حيث $t_1$ زمن $\Leftarrow$ $m$ لبلغ بعد $t_1$ زمن

$y(0) = 10000 \Rightarrow t_1 = 0,\ m = 10000$ وباستخدام

$$\Rightarrow \frac{1}{0.06}\ln\frac{0.06A+d}{0.06(10000)+d} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{0.06A+d}{600+d} = 1 = e^0$$



Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow 0.06A + d = 600 + d$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{600}{0.06} = 10000}$$

$$y(20) = 1000000$$ حالة أولية

$$\Rightarrow \frac{1}{0.06} \ln \frac{0.06(100000) + d}{600 + d} = 20$$

$$\ln \frac{60000 + d}{600 + d} = 1.2$$

$$\Rightarrow \frac{60000 + d}{60 + d} = e^{1.2}$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 25774.9}$$

د/ مصباح الطوانسي



Scanned by CamScanner

38

$A(0) = 150\,000$

$A'(t) = 0.08\,A(t) - 12P$ ⟸ دراسة الحالة

حيث P مقدار القسط الشهري ⟸

$$\int \frac{dA}{0.08A - 12P} = \int dt$$

$$\frac{1}{0.08} \ln|0.08A - 12P| = t + C$$

$A(0) = 150\,000$ بالتعويض

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08} \ln|0.08(150000) - 12P| = C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08} \ln|0.08A - 12P| = \frac{1}{0.08} \ln|8(1500) - 12P| + t$$

$A(30) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08} \ln|-12P| = \frac{1}{0.08} \ln|\underset{12000}{-12P}| + 30$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08} \ln|12P| = \frac{1}{0.08} \ln|12000 - 12P| + 30$$

مقدار القسط الشهري $\Rightarrow$ $\boxed{P = 916.82}$



Scanned by CamScanner

المبلغ الإجمالي المدفوع $= 916.82 \times 12 \times 30$

$= 330055.2$

المبلغ الذي أخذه (الزيادة) $= 330055.2 - 150000$

$= 180055.2$

---

ج) يتقن الطريقة على حالة من أي صيغة

ونكتب تقنين ظروف الحل $A(15) = 0$

$A(0) = 150000$

---

د) $A(0) = 125000$

$A(30) = 0$

ونكتب صيغة دالة خطية $25000 =$

ونكتب تقنين ظروف الحل $\Rightarrow A(0) = 125000 - 2500$

$A(0) = 100000$



Scanned by CamScanner

39

$$\frac{dA}{dt} = rA + d$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.08A + 10000$$

$$\Rightarrow \int \frac{dA}{0.08A + 10000} = \int dt$$

$$\frac{1}{0.08} \ln|0.08A + 10000| = t + C$$

وبتبديل الشرط

$A(0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08} \ln|0 + 10000| = 0 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 115.12}$$

$$\boxed{\frac{1}{0.08} \ln|0.08A + 10000| = t + 115.12}$$

$$\Rightarrow \ln|0.08A + 10000| = 0.08t + 9.21$$

$$\Rightarrow \frac{0.08A + 10000}{0.08} = \frac{e^{0.08t + 9.21}}{0.08} - \frac{10000}{0.08}$$

$$\Rightarrow A = 124957.4\, e^{0.08t} - 125000$$

وعندما $t = 10$

$$\boxed{A = 153097.8}$$

المبلغ المودع = 10000

لم يقدم دفعة أولى

$\Rightarrow A(0) = 0$

$r = 8\% = 0.08$

$t = 10$

سؤال الطالب الذي لم يضع دفعة

35

مثال (40) صفحة

Scanned by CamScanner

وإذا استمرت الموضوع هذه 65 سنة

أي بعد 40 من سنة الخمسة $\Leftarrow$ $t=25$

وبكم $A(0)=153,097.8$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08}\ln\left|0.08(153097.8)+10000\right| = 0+C$$

$$C = 125.12$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.08}\ln\left|0.08A+10000\right| = t+125.12$$

وعندما $t=25$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 192059.51$$



Scanned by CamScanner

الفرع b يحل بنفس خطوات حل الفرع a مع المعطيات

$$d = 20\,000$$
$$t = 25$$
$$r = 8\%$$
$$A(0) = 0$$
$$A(25) = \dots$$

الفرع c ⟸ إيجاد معدل المراجحة r مع مشاهدة استثمار المال مع استثمارهما

أي أن

$$A_1 = A_2$$

ونوجد r = ....



Scanned by CamScanner

$$\frac{dA}{dt} = rA - d$$

$$\frac{dA}{0.1A - d} = (0.1A - d)\,dt$$

$$\frac{1}{0.1}\ln|0.1A - d| = t + C$$

$A(0) = 1000000$ بالتعويض

$$\Rightarrow \frac{1}{0.1}\ln|0.1(1000000) - d| = 0 + C$$

$$\frac{1}{0.1}\ln|0.1A - d| = t + \frac{1}{0.1}\ln|100000 - d|$$

$$\frac{1}{0.1}\ln\frac{0.1A - d}{100000 - d} = t$$

$A(30) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.1}\ln\frac{-d}{100000 - d} = 30$$

ln

$$\Rightarrow d = 105\,239.5$$

$P = 1000000$

$r = 10\% = 0.1$

$t = 30$

$A(0) = 1000000$

$d = \cdots\cdots$ المبلغ الذي نسحبه

$A(30) = 0$



Scanned by CamScanner

41

(7.3) حل المعادلة التفاضلية في مثال 9

$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 3x + C$ هو

وعندما الشرط عند $(0,0)$ $\Leftarrow C=0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 3x}$$

ونجعل جدول القيم كما في الرسم

b) $y' = \frac{x^2+7x+3}{y^2}$

عند $y(0)=0 \Leftarrow$ $y=0$ $x=0$

$\Rightarrow y'(0) = \frac{0}{0}$ كمية غير معرفة

وبالتالي لا يوجد ميل للمماس عند النقطة $(0,0)$ للمنحنى

وعليه رسم الدالة بالجدول المعطى

c) المعادلة التفاضلية $y' = \frac{x^2+7x+3}{y^2}$

لا يوجد لها قيمة عند $y(x)=0$

$\Rightarrow y^2\,dy = x^3+7x+3\,dx$

$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 3x + C$

Scanned by CamScanner

$$y^3 =: x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-3C = x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x}$$

نعرض أنها الدالة $h(x) = x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x$

$$\Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 21x + 9$$

ونجد دلتا $h'(x) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = -0.45} \qquad \boxed{x_2 = -6.54}$$

وهنا نكون قيمة عظمى للدالة $h(x)$ ونكون قيمة صغرى

$$-3C = h(x) \quad \text{أي}$$

$$\frac{h(x_2)}{-3} \leq \frac{-3C}{-3} = h(x) \leq \frac{h(x_1)}{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{h(x_2)}{-3} \geq c > \frac{h(x_1)}{-3}$$

$$\therefore h(x_1) = h(-0.45) = -2.01$$

$$h(x_2) = h(-6.54) = 110.5$$

$$\frac{110.5}{-3} < c < \frac{-2.01}{-3}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} -36.8 < c < 0.67 \\ c_1 < c < c_2 \end{array}}$$



Scanned by CamScanner

الإبداع ٢٠١٧

الرسم ← يظهر جيم صديقة تقوم بالرسم ← 4/2

ب) مع $C=C_2$ $\boxed{C=C_2}$

$C=C_2=0.67185$

$h(x)=-3C=-3C_2=-3(0.67185)$

$h(x)=-2.01555$

$h(x)=x^3+\frac{21}{2}x^2+9x=-2.01555$



Scanned by CamScanner

$$x'(t) = k_1(a+c-x)(b+c-x) - k_{-1}\,x\,(d-c+x)$$

$$x'(t) = 1\,(0.9-x)(0.6-x) - 0.625\,x\,(0+x)$$

$$x'(t) = 0.24 - 0.4x - 0.6x + x^2 - 0.625x^2$$

$$x'(t) = 0.375x^2 - x + 0.24$$

$k_1 = 1$ ⟸ 43

$k_{-1} = 0.625$

$a + c = 0.9$

$b + c = 0.6$

$c = d$

$x(0) = 0.2$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{0.375x^2 - x + 0.24} = \int dt$$

وباستخدام الكسور الجزئية

$x = 2.4$ $\quad x = 0.26$

$$\Rightarrow \frac{1\,dx}{(x-2.4)(x-0.26)} = t + C$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x-2.4} + \frac{B}{x-0.26} =$$

$$1 = A(x-0.26) + B(x-2.4)$$

$x = 2.4 \Rightarrow 1 = 2.14A \Rightarrow \boxed{A = 0.46}$

$x = 0.26 \Rightarrow 1 = B(0.26-2.4)$

$1 = -2.14B \Rightarrow \boxed{B = -0.416}$

42

⟸ تابع الل ⟸

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \int \frac{0.46}{x-2.4} + \frac{-0.46}{x-0.26}$$

$$0.46\ln|x-2.4| - 0.46\ln|x-0.26| = t + C$$

باستخدام الشرط الابتدائي هو

$X(0) = 0.2$

$\Rightarrow$ (t=0) (x=0.2)

$$\Rightarrow 1.65 = 0 + C \Rightarrow \boxed{C = 1.65}$$

$$\Rightarrow \boxed{0.46\ln|x-2.4| - 0.46\ln|x-0.26| = t + 1.65}$$

$$\Rightarrow \ln|x-2.4|^{0.46} - \ln|x-0.26|^{0.46} = t + 1.65$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x-2.4}{x-0.26}\right)^{0.46} = t + 1.65$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-2.4}{x-0.26}\right)^{0.46} = e^{t+1.65}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x-2.4}{x-0.26} = e^{\frac{t+1.65}{0.46}}}$$



Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \frac{(x-0.26)+(0.26-2.14)}{x-0.26} = e^{\frac{t+1.65}{0.46}}$$

$$\frac{1}{x-0.26} + \frac{-2.14}{x-0.26} = e^{\frac{1}{0.46}(t+1.65)}$$

$$\frac{-2.14}{x-0.26} = e^{\frac{1}{0.46}(t+1.65)} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{x-0.26}{-2.14} = \frac{1}{e^{\frac{1}{0.46}(t+1.65)} - 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2.14}{e^{\frac{1}{0.46}(t+1.65)} - 1} + 0.26$$

وهي معادلة التزايد

$$\therefore t \to \infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x = 0 + 0.26 = 0.26$$

لأن

$$e^{\frac{1}{0.46}(t+1.65)} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{-2.14}{\infty} + 0.26 = 0.26$$



Scanned by CamScanner

الخلاصة ⟸ بعد تنفيذ خطوات حل رقم (43)

نجد أن الحل العام لأي مسألة من هذا النوع

$$x'(t) = k_1 (a+c-x)(b+c-x) - k_{-1} \times (d-c+x)$$

لثوابت المعدل $k_1$ و $k_{-1}$

عند شروط ابتدائية معينة تؤخذ من معطيات السؤال

ص

$$x(t) = \frac{4\left(k\, e^{\frac{4}{5}t} - 3\right)}{5\left(3k\, e^{\frac{4}{5}t} - 1\right)}$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي $x(t_0) =$ رقم لإيجاد الثابت $k$

ثم نحصل على حالة التركيز $x(t)$

ثم الحصول على التركيز النهائي $\lim_{t \to \infty} x(t)$

وبالتالي يمكن حل السؤال (43) بالقانون مباشرة

بدلاً من الحل الطويل السابق الذي يحتوي على (3) صفحات



Scanned by CamScanner

44 ← للفرع a ← باستخدام القانون العام نوجد حالة التركيز

$$x(t) = \frac{4\left(k e^{\frac{4}{5}t} - 3\right)}{5\left(3k e^{\frac{4}{5}t} - 1\right)}$$

وباستخدام الشرط الابتدائي ⟸ $x(0) = 0.3$

لأن $e^{\frac{4}{5}t} = e^{0} = 1$

$$\Rightarrow 0.3 = \frac{4(k-3)}{5(3k-1)}$$

الحل بالآلة الحاسبة ⟹ $\boxed{k = -21}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{4\left(-21 e^{\frac{4}{5}t} - 3\right)}{5\left(-63 e^{\frac{4}{5}t} - 1\right)}$$

الفرع b ← عندما $x(0) = 0.6$

$$\Rightarrow 0.6 = \frac{4(k-3)}{5(3k-1)}$$

وذلك بالتعويض في نفس القانون العام الموجود في الفرع (a)

$$\Rightarrow \boxed{k = -1.8}$$

$$\boxed{x(0) = 0.6 = c}$$

وهذا مستقيل لأن

$b + c = 0.6$ ⟸ وبمساواة كل المعطيات

الموجودة في كلا الفرعين (43) ⟸ تابع

46

Scanned by CamScanner

$b + c = 0.6$ نصل لـ

$\Rightarrow b + 0.6 = 0.6$

$\Rightarrow \boxed{b = 0}$ وهذا مستقبل

وأيضاً $c = d \Leftarrow$

وأيضاً $a + c = 0.4$

$\Rightarrow a + 0.6 = 0.4$

$\Rightarrow \boxed{a = -0.2}$ وهذا مستقبل التركيز سالب

---

لأن كلاً من $a \, / \, b \, / \, c \, / \, d$

التركيزات الابتدائية $\Leftarrow$ $A \, / \, B \, / \, C \, / \, D$ بالترتيب

حيث يتحد الجزيئان $A \, / \, B$ جزيئان ليكونا جزيئين آخرين

$C \, / \, D$

$$\begin{bmatrix} C & x(t) \text{ هو تركيز الذي} \\ D & y(t) \text{ هو تركيز الذي} \end{bmatrix}$$

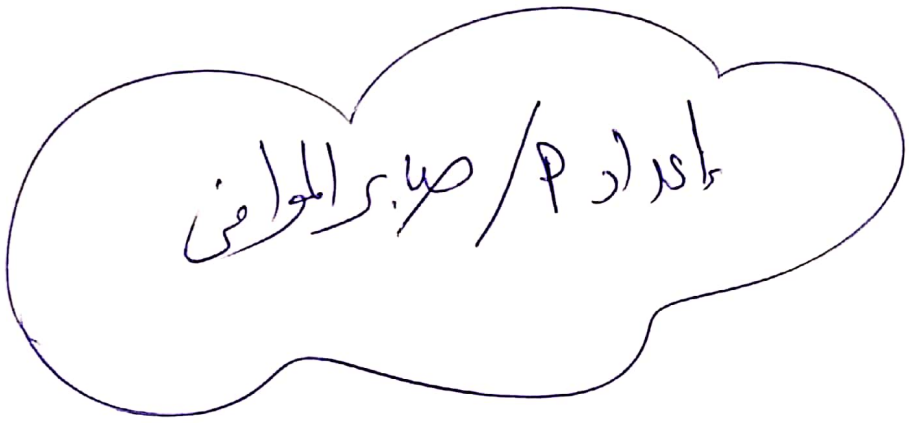


Scanned by CamScanner

45 ← ملاحظة هامة جداً ⇐

المقصود بالمعادلة التفاضلية للتركيز c هو $x(t)$

نقوم باستخدام المعادلة التفاضلية الموجودة
في المعين رقم (43) ونحل بالتكامل
ونعيد نفس خطوات الحل في (43)
فتحصل على حل المعادلة التفاضلية وهو $x(t)$
فيكون هو التركيز عند أي لحظة زمنية
اعتمد على نفسك ⇐






Scanned by CamScanner

46 ⟸ نفس حل خطوات القرين (43) و (45)

اعتمد على نفسك ⟸



Scanned by CamScanner

## دراسة معادلة اللوجستية

$$y'(t) = k\,y\,(M - y) - R$$

R معدل الصيد
M القيمة العظمى للمجتمع
k ثابت

47 ⟸ مجتمع صيد الأسماك يقدر عشوائيا بـ (100 000)
ويتبع معادلة النموذج اللوجستي حيث
$k = 0.025$
$M = 8$

a) صيد السمك يتطور بحيث يكون المجتمع الابتدائي
$\frac{800\,000}{100\,000} \Leftarrow$ أي أن $y(0) = 8$
$\frac{20\,000}{100\,000} \Leftarrow$ وسنبدأ بمعدل $R = 0.2$
كل عام بسبب الصيد

الحل

باستخدام معادلة النمو اللوجستية $y'(t) = ky(M-y) - R$

⟸ تابع الحل ⟸



Scanned by CamScanner

$$y'(t) = 0.025\, y(8-y) - 0.2$$

$$y'(t) = 0.2y - 0.025y^2 - 0.2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = (-0.025y^2 + 0.2y - 0.2)\, dt$$

$$\int \frac{1\, dy}{-0.025y^2 + 0.2y - 0.2} = \int dt$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن ← وبتحليل المقام بالآلة

$y = 6.8$

$y = 1.17$

$$\frac{1}{(y-6.8)(y-1.17)} = \frac{A}{(y-6.8)} + \frac{B}{y-1.17}$$

$$\Rightarrow 1 = A(y-1.17) + B(y-6.8)$$

$y = 6.8 \Rightarrow 1 = 5.63A \Rightarrow A = 0.17$

$y = 1.17 \Rightarrow 1 = -5.63B \Rightarrow B = -0.17$

$$\Rightarrow \int \frac{0.17}{y-6.8} + \frac{-0.17}{y-1.17}\, dy = t + C$$

$$0.17 \ln|y-6.8| - 0.17 \ln|y-1.17| = t + C$$

⇐ تابع الحل ⇐ التعليقة



Scanned by CamScanner

$y(0) = 8$ وباستخدام الشرط الابتدائي

$\Rightarrow$ $t=0$ $y=8$ $\Rightarrow C = -0.29$

$$\Rightarrow \ln|y-6.8|^{0.17} - \ln|y-1.17|^{0.17} = t - 0.29$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y-6.8}{y-1.17}\right)^{0.17} = t - 0.29$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y-6.8}{y-1.17}\right)^{0.17} = e^{\frac{1}{0.17}(t-0.29)}$$

$$\Rightarrow \frac{y-1.17+1.17-6.8}{y-1.17} = e^{\frac{1}{0.17}(t-0.29)}$$

$$\Rightarrow \frac{y-1.17}{y-1.17} + \frac{-5.63}{y-1.17} = e^{\frac{1}{0.17}(t-0.29)}$$

$$\frac{-5.63}{y-1.17} = \frac{e^{\frac{1}{0.17}(t-0.29)} - 1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{y-1.17}{-5.63} = \frac{1}{e^{\frac{1}{0.17}(t-0.29)} - 1}(-5.63)$$

$\Leftarrow$ تابع لا تعلم

على شكله مع الآخرين

52

Scanned by CamScanner

$$y = \frac{-5.63}{e^{\frac{1}{0.17}(t-0.29)} - 1} + 1.17$$

للحصول على الحد الطويل

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{-5.63}{e^{\frac{1}{0.17}(t-0.29)} - 1} + 1.17$$

$$= 5.63 + 1.17 =$$

$$= 6.8 \times 100\,000$$

$$= \text{تقريباً } 680{,}000$$

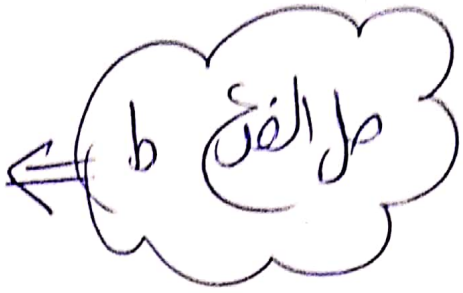
b > كل شخص لكل شهر معدل هو

$$R = 0.6 = \frac{60\,000}{100\,000} \Leftarrow 60\,000$$

المعدل الشهري



Scanned by CamScanner






Scanned by CamScanner

48 بعد نموذج الأرنب بالجمارة

$$P'(t) = 0.025P[8-P] - R$$

ويكون عدد أفراد المجتمع ثابت إذا كان

$$P'(t) = P^2 - 8P + 40R = 0$$

وتسمى الحلول نقاط التوازن

والحلول ⇐ المقارنة بين نقاط التوازن عندما

47 في التمرين a) $R = 20\,000$ b) $R = 60\,000$

a) $R = 0.2$

$$\Rightarrow 0.025P(8-P) - R = P^2 - 8P + 40R$$

$$\Rightarrow 0.2P - 0.025P^2 - R - P^2 + 8P - 40R = 0$$

$$-1.025P^2 + 8.2P - 41R = 0$$

$$\Rightarrow -1.025P^2 + 8.2P - 41(0.2) = 0$$

$$\Rightarrow P = 6.8 \quad P = 1.17$$

تابع الحل ⇐ عندما يرتفع التدريب [P/ مربار الطوافي]

55

Scanned by CamScanner

b) $R = 0.6$

$$\Rightarrow -1.025p^2 + 8.2p - 41R = 0$$

$$-1.025p^2 + 8.2p - \cancel{41(0.6)} = 0$$

$$-24.6$$

$$\Rightarrow p = 4 + 2\sqrt{2}\,i \qquad p = 4 - 2\sqrt{2}\,i$$

حلول تخيلية

الخاصية $\Leftarrow$ الفرع (a) $\Leftarrow R = 0.2$

تبعد أفقيا للدالة $p$ عن نقاط التوازن

الفرع (b) $\Leftarrow R = 0.6$

لا يوجد أفقيا للدالة $p$ $\Leftarrow$ لا يوجد نقاط توازن

أكداد $p$ / صابر الطوانسي



Scanned by CamScanner

49

$$p'(t) = 0.05p(8-p) - 0.6 \quad \text{(حل تفويض)}$$

$$= 0.4p\left(1 - \frac{p}{8}\right) - 0.6 \quad \text{أو}$$

$$\frac{dp}{dt} = 0.4p - 0.05p^2 - 0.6$$

$$= -0.05\left[p^2 - 8p + 12\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p^2 - 8p + 12} = -0.05\,dt$$

$$\frac{1}{(p-6)(p-2)} = \frac{A}{p-6} + \frac{B}{p-2}$$

$$1 = A(p-2) + B(p-6)$$

$p = 6 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = 0.25$

$p = 2 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -0.25$

$$\int \frac{0.25}{p-6} + \frac{-0.25}{p-2}\,dp = -0.05t + C$$

$$0.25\ln|p-6| - 0.25\ln|p-2| = -0.05t + C$$

← باقي الحل

57

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{p-6}{p-2}\right)^{0.25} = -0.05t + C$$

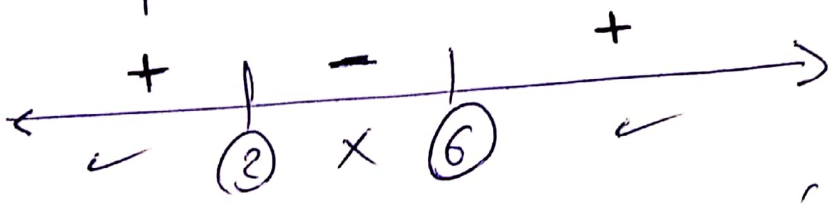
$$\Rightarrow \left(\frac{p-6}{p-2}\right)^{0.25} = e^{-0.05t+C} = e^{-0.05t} \cdot e^{C}$$

$$= A\, e^{-0.05t} \quad (A = e^{C} \text{ ثابت})$$

$$\Rightarrow \frac{p-6}{p-2} = A^{\frac{1}{0.25}}\, e^{\frac{-0.05t}{0.25}}$$

$$\boxed{\frac{p-6}{p-2} = A\, e^{-0.2t}}$$

ومن شروط دالة اللوغاريتم $\frac{p-6}{p-2} > 0 \Leftarrow$ ①




* وذلك يتحقق شرط $p < 2$ أو $p > 6$

* الحالة $2 < p \leq 6$ الدالة تجعل اللوغاريتم سالب



Scanned by CamScanner

$\lim_{t\to\infty} p(t)$ لإيجاد

$\frac{p-6}{p-2} = A e^{-0.2t}$ ← باستبدال المعادلة

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{p-6}{p-2} = \lim_{t\to\infty} A e^{-0.2t}$

$\Rightarrow \frac{p-6}{p-2} = \lim_{t\to\infty} \frac{A}{e^{0.2t}} = \frac{A}{\infty} = 0$

$\Rightarrow p-6=0 \Rightarrow p=6$

---

50 ← المعادلة التفاضلية

$y' = ky(M-y)$

$= kMy\left(1-\frac{y}{M}\right)$

$kM = r$ يسمى الجزء معدل النمو الطبيعي للنوع الحيواني

مقارنة الحيوانات في الكتب (47) (48) (49)

فيدانه يؤثر تأثيراً كبيراً

59

Scanned by CamScanner

في تمرين (47) ⟸ $M = 8$ ، $k = 0.025$

$\Rightarrow$ معدل النمو الأسي $r = kM = 8(0.025)$

$= 0.2$

تمرين (48) ⟸ $r = kM = 0.2$

تمرين (49) ⟸ $M = 8$ ، $k = 0.05$

$\Rightarrow r = kM = 0.05(8) = 0.4$

والخلاصة ⟸ $r = kM$

لهائج يشمل مجتمع العمل

البعض يؤدي الى موت الرجال والآخر لا يؤدي الى موته

إعداد م/ صابر الوافي



Scanned by CamScanner

51

دالة البيع $r(t)$ تتناسب مع الفرق بين السعر الحالي وحد الكرة $S$

$$\Rightarrow r'(t) \propto (r-S)$$

$$\Rightarrow r'(t) = k(r-S)$$

$r(0) = 14000$
$r(4) = 8000$
$S = 1000$
...

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = k(r-1000)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r-1000} = k\,dt$$

$$\ln|r-1000| = kt + C$$

$r(0) = 14000 \Rightarrow \ln|14000-1000| = 0 + C$

$$\Rightarrow C = 9.47$$

$$\ln|r-1000| = kt + 9.47$$

$y(4) = 8000 \Rightarrow \ln|7000| = 4k + 9.47$

$$\Rightarrow k = -0.15$$

$$\Rightarrow \ln|r-1000| = -0.15t + 9.47$$

$$r - 1000 = e^{-0.15t + 9.47}$$

$$r = e^{9.47}\, e^{-0.15t} + 1000$$

$$r = 12964\, e^{-0.15t} + 1000$$

61

Scanned by CamScanner