1

التكامل الغير محدود

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

1 قاعدة (1) ثابت ⟸ $\int k\,dx = kx + c$

c: ثابت التكامل

أوجد التكاملات التالية = المشتقات العكسية

$$\int 2\,dx = 2x + c \qquad \int 4\,dt = 4t + c$$

$$\int \pi^2\,dy = \pi^2 \cdot y + c \qquad \int \pi\,dr = \pi r + c$$

$$\int \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}u + c \qquad \int dx = x + c$$

$$\int e\,dx = ex + c \qquad \int dy = y + c$$

$$\int \overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\,dx = x + c$$

محمود مراد 0506565584

قاعدة (2) القوى

$$\int a x^{n}\, dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

أوجد التكاملات

$$\int 3x^2\, dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$$

$$\int 2x^{\frac{2}{5}}\, dx = 2\left(\frac{5}{7}\right) x^{\frac{7}{5}} + c = \frac{10}{7} x^{\frac{7}{5}} + C$$

$$\int 4x^{-3}\, dx = \frac{4x^{-2}}{-2} + c = \frac{-2}{x^2} + c$$

$$\int \frac{3}{x^4}\, dx = \int 3x^{-4}\, dx = \frac{3x^{-3}}{-3} + c$$

$$= -x^{-3} + c = \frac{-1}{x^3} + c$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}\, dx = \int 4x^{-\frac{2}{5}}\, dx = 4\left(\frac{5}{3}\right) x^{\frac{3}{5}} + c$$

$$= \frac{20}{3} x^{\frac{3}{5}} + c$$

3

خاصية التكامل الغير محدد

1) خاصية توزيع التكامل على عمليتي الجمع و الطرح فقط

$$\int \left(f(x) \mp g(x) \mp \dots \right) dx$$

$$= \int f(x)\,dx \mp \int g(x)\,dx \mp \dots$$

2) خاصية خروج الثابت من التكامل

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

أوجد كل من التكاملات التالية

هل يوجد بالتكامل
1) ضرب
2) قسمة
3) جذور
4) تبسيط

ثم أجري عملية التكامل

① $\int \left(2x - \frac{3}{x^2} + 4\right) dx$

$= \int 2x\,dx - \int 3x^{-2}\,dx + \int 4\,dx$

$= \frac{2x^2}{2} - \frac{3x^{-1}}{-1} + 4x + c$

$= x^2 + \frac{3}{x} + 4x + c$

مقدار ... مرافقه

② $\int (2\sqrt{x} - 3)\cdot(2\sqrt{x} + 3)\,dx$

$a^2 - b^2$

$(a-b)(a+b)$

$= \int (4x - 9)\,dx$

$= \frac{4x^2}{2} - 9x + c$

$= 2x^2 - 9x + c$

④

③ $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 4x^2 + 1}{x^2}\,dx$

حد

المقام حد جبري
(مقسمة توزيع)

$= \displaystyle\int \left(\frac{3x^3}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \displaystyle\int (3x - 4 + x^{-2})\,dx$

$= \dfrac{3x^2}{2} - 4x + \dfrac{x^{-1}}{-1} + c = \dfrac{3}{2}x^2 - 4x - \dfrac{1}{x} + c$

---

④ $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x - 3}{x-3}\,dx$

مقدار

تحليل وتبسيط

$= \displaystyle\int \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}}\,dx = \int (x+1)\,dx$

$= \dfrac{x^2}{2} + x + C$

---

⑤ $\displaystyle\int \left(\frac{2x-6}{3-x}\right)^4 dx = \int \left(\frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(3-x)}}\right)^4 dx$

$= \displaystyle\int (-2)^4\,dx = \int 16\,dx = 16x + C$

---

⑥ $\displaystyle\int \left(x\cdot\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(x\cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$

م الضرب نجمع الاس

م القسمة نطرح الاس

$= \displaystyle\int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$= \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

Scanned by CamScanner

5

تكامل الدالة الأسية

$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$$

في الدالة الأسية نسأل: هل مشتقة الأس موجود في التكامل

((الجواب الدالة الأسية))

$$\int 1e^{x}\,dx = e^{x} + c$$

أوجد كل من التكاملات التالية

① $\int 5e^{2x+1}\,dx = \frac{5}{2}\int 2\cdot e^{2x+1}\,dx$

$= \frac{5}{2}e^{2x+1} + c$

② $\int \left(\frac{3}{x^{4}} + e^{2x} + 1\right)dx$

توزيع التكامل على الجمع والطرح بوجود الدالة الأسية ضروري

$= \int 3x^{-4}\,dx + \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + \int 1\,dx$

$= \frac{3x^{-3}}{-3} + \frac{1}{2}e^{2x} + x + c$

$= \frac{-1}{x^{3}} + \frac{1}{2}e^{2x} + x + c$

③ $\int \frac{3}{e^{2x-1}}\,dx = 3\int e^{-2x+1}\,dx$

$-\frac{3}{2}\int -2e^{-2x+1}\,dx = -\frac{3}{2}\int -2e^{-2x+1}\,dx = \frac{-3}{2}e^{-2x+1} + c$

④ $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^{2}x}\,dx = \int \sec^{2}x\, e^{\tan x}\,dx$

$= e^{\tan x} + c$

⑥

⑤ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

$= 2e^{\sqrt{x}} + C$

---

⑥ $\int \sqrt[3]{e^{6x}} dx = \int (e^{6x})^{\frac{1}{3}} dx$

$= \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x} dx$

$= \frac{1}{2} e^{2x} + C$

---

⑦ $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \frac{1}{-1}\int \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

$= -e^{\frac{1}{x}} + C$

---

⑧ $\int (xe^{5x^2} + \sqrt{x} + 5) dx$

$= \frac{1}{10}\int 10x\, e^{5x^2} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int 5 dx$

$= \frac{1}{10} e^{5x^2} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 5x + C$

Scanned by CamScanner

7

⑨ $\int e^{x^3 + 2\ln x}\, dx$ فكرة

$= \int e^{x^3} \cdot e^{\ln x^2}\, dx = \int e^{x^3} \cdot x^2\, dx$

$= \frac{1}{3}\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\, dx$

$= \frac{1}{3} e^{x^3} + C$

---

⑩ $\int e^{\cot x - 2\ln \sin x}\, dx$

الحكاية
المتغيرات
فكرة

$= \int \frac{e^{\cot x}}{e^{\ln \sin^2 x}}\, dx = \int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\, dx$

$= -\int -\csc^2 x\, e^{\cot x}\, dx = -e^{\cot x} + C$

---

⑪ $\int \frac{(e^{2x} - e^{x} + 5)}{e^{x}}\, dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{e^{x}} - \frac{e^{x}}{e^{x}} + \frac{5}{e^{x}}\right) dx$

$= \int 1 e^{x}\, dx - \int 1\, dx + -5\int -e^{-x}\, dx$

$= e^{x} - x - 5e^{-x} + C = e^{x} - x - \frac{5}{e^{x}} + C$

---

⑫ $\int \frac{e^{2x} - 2e^{x} - 3}{e^{x} - 3}\, dx = \int \frac{\cancel{(e^{x} - 3)}(e^{x} + 1)}{\cancel{(e^{x} - 3)}}\, dx$

$= e^{x} + x + C$

تكامل الدالة اللوغاريتمية

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

هل البسط مشتقة المقام ← شرط

« $\ln$ |المقام| »

$$\frac{-a}{x^2} \xleftarrow{\text{الاشتقاق}} \frac{a}{x} \xrightarrow{\text{التكامل}} a\ln|x|$$

أوجد كل من التكاملات

① $\int \frac{5x}{x^2+1}\,dx$

$2x$

$= \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{5}{2}\ln|x^2+1| + c$

② $\int \frac{1-\sin 2x}{2x+\cos 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2-2\sin 2x}{2x+\cos 2x}\,dx$

$2-2\sin 2x$

$= \frac{1}{2}\ln|2x+\cos 2x| + c = \ln\sqrt{2x+\cos 2x} + c$

③ $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\,dx$

$3e^{3x}$

$= \frac{1}{3}\ln|1+e^{3x}| + c$

(5) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$

$2x+2$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \ln\sqrt{x^2+2x+5} + c$$

(6) $\displaystyle\int \frac{3x+6}{x^2+4x+10}\,dx = 3\int \frac{x+2}{x^2+4x+10}\,dx$

$2x+4$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+10}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+10| + c$$

(7) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-2x-3}\,dx$ فكرة أخرى

$2x-2$

$$= \int \frac{(x+1)}{(x-3)(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= \ln|x-3| + c$$

(8) $\displaystyle\int \left(6x - \frac{4}{x} + e^{3x}\right)dx$

$$= \int 6x\,dx - \int \frac{4}{x}\,dx + \frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{6x^2}{2} - 4\ln|x| + \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

$$= 3x^2 - 4\ln|x| + \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

اوجد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int \left(4x - \frac{2}{x} + \sqrt{x}\right) dx$

② $\int e^{3x}(1 - e^{x})\, dx$

③ $\int \frac{4x}{x^2+1}\, dx$

④ $\int \frac{x^2 e^{x^2+1} - 3}{x}\, dx$

5. $$\int \frac{dx}{x \ln x}$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})}$$

7. $$\int \frac{5x+10}{x^2+4x+1}\,dx$$

8. $$\int \frac{x-5}{x^2-25}\,dx$$

اوجد الدالة f التي لها الخواص التالية

① $f'(x) = 4x^3 - 2$ ؛ $f(1) = 5$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$= \int (4x^3 - 2)\,dx = \frac{4x^4}{4} - 2x + c$$

$$f(x) = x^4 - 2x + c \longleftarrow f(1) = 5$$

$$f(1) = (1)^4 - 2(1) + c = 5$$

$$c = 6$$

$$\boxed{f(x) = x^4 - 2x + 6}$$

② $f''(x) = 12x + 6$ ؛ $f'(0) = 2$, $f(0) = 5$

أولاً

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx$$

$$= \int (12x + 6)\,dx$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + c_1$$

$$f'(0) = 2$$

$$\cancel{6(0)^2} + \cancel{6(0)} + c_1 = 2$$

$$c_1 = 2$$

$$\boxed{f'(x) = 6x^2 + 6x + 2}$$

ثانياً

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$= \int (6x^2 + 6x + 2)\,dx$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + c_2$$

$$f(0) = 5$$

$$\cancel{2(0)^3} + \cancel{3(0)^2} + \cancel{2(0)} + c_2 = 5$$

$$c_2 = 5$$

$$\boxed{f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 5}$$

① $f(x) = \int f'(x)\,dx$

② $f'(x) = \int f''(x)\,dx$

* ايجاد الموقع (الموضع) للجسم الذي يتحرك

① التسارع $a(t) = -1.2t + 6$ حيث

$S(0) = 4$, $v(0) = 1$

أولاً

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$

$$= \int (-1.2t + 6)\,dt$$

$$v(t) = -0.6t^2 + 6t + c_1$$

$v(0) = 1$

$0 + 0 + c_1 = 1$

$c_1 = 1$

$$v(t) = -0.6t^2 + 6t + 1$$

ثانياً

$$S(t) = \int v(t)\,dt$$

$$S(t) = \int (-0.6t^2 + 6t + 1)\,dt$$

$$= -0.2t^3 + 3t^2 + t + c_2$$

$S(0) = 4$

$0 + 0 + 0 + c_2 = 4$

$c_2 = 4$

$$S(t) = -0.2t^3 + 3t^2 + t + 4$$

② السرعة المتجهة $V(t) = 6t - 4$

حيث $S(0) = 8$

$$S(t) = \int v(t)\,dt = \int (6t - 4)\,dt$$

$$S(t) = 3t^2 - 4t + C$$

$S(0) = 8$

$C = 8$

$$S(t) = 3t^2 - 4t + 8$$

$$S(t) \longrightarrow S'(t) = V(t) \longrightarrow S''(t) = a(t)$$

دالة الموضع (الموقع) — السرعة المتجهة — التسارع

$$S(t) \xleftarrow{\text{تكامل}} V(t) \xleftarrow{\text{تكامل}} a(t)$$

تكامل الدوال المثلثية

مهمة

$$\int \sin(kx)\,dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + c$$

$$\int \cos(kx)\,dx = +\frac{\sin(kx)}{k} + c$$

$$\int \sec^2(x)\,dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-(u)^2}}\,du = \sin^{-1}(u) + c$$

$$\int \frac{u'}{1+(u)^2}\,du = \tan^{-1}(u) + c$$

$$\int \frac{u'}{|u|\sqrt{(u)^2-1}}\,du = \sec^{-1}(u) + c$$

الدالة الأصلية والمشتقة العكسية

* أوجد الدالة الأصلية للدوال

$f(x) = 4x + 3\sin 6x$

$\int (4x + 3\sin 6x)\,dx = \frac{4x^2}{2} - \frac{3\cos 6x}{6} + C$

$F(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}\cos(6x) + C$

$f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{x} + 8$

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(\frac{4}{x} - x^{\frac{1}{2}} + 8\right)dx$

$= 4\ln|x| - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x + C$

* أوجد المشتقة العكسية للدوال

$f(x) = e^{2x} + 5x + 1$

$\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + \int 5x\,dx + \int 1\,dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{5x^2}{2} + x + C$

$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

$4\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{4}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$= 2\ln|x^2+1| + C$

إذا كانت $F(x)$ هي دالة أصلية $f(x)$ فإن

1) $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

2) $F'(x) = f(x)$

مثال: إذا كانت F هي دالة أصلية للدالة f وكان

$$\int f(x)\,dx = e^{2x} + \ln(2x+1)$$

فأوجد ① $f(x)$ ② $f'(0)$

$$\int f\,dx = F$$
$$F' = f$$

$$F(x) = e^{2x} + \ln(2x+1)$$

$$F'(x) = f(x) = 2e^{2x} + \frac{2}{2x+1}$$

$$f'(x) = 4e^{2x} + \frac{(2x+1)(0) - (2)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = 4e^{2x} - \frac{4}{(2x+1)^2}$$

$$f'(0) = 4e^0 - \frac{4}{1} = 4 - 4 = 0$$

كم عدد الدوال الأصلية للدالة $f(x) = 3x^2$

عدد غير محدود (لا نهائي) من الدوال الأصلية

$F(x) = x^3 + 5$

$G(x) = x^3 - 1$

$H(x) = x^3 + 1$

$\longrightarrow f(x) =$ المشتقة

يوجد عدد غير محدود من الدوال الأصلية للدالة $f(x)$ تختلف فقط في الثابت c

$$\boxed{C = F - G}$$

مثال: لتكن $F(x)=(2x+3)^2$ ، $G(x)=4x^2+12x-8$
أجب

1 أثبت أن F ، G هما مشتقات عكسية للدالة f (دوال أصلية للدالة f)

$$F'(x) = 2(2x+3)(2) = (4x+6)(2) = 8x+12$$

$$G'(x) = 8x+12$$

$$F' = G' \longrightarrow$$ كلا من الدالتين F ، G هما دوال أصلية للدالة $f(x)$

2 أوجد قيمة الثابت c التي تختلف به الدالتين F ، G

$$C = F - G$$

$$= (2x+3)^2 - (4x^2+12x-8)$$

$$= \cancel{4x^2} + \cancel{12x} + 9 - \cancel{4x^2} - \cancel{12x} + 8$$

$$C = 17$$

3 أوجد $f(x)$

$$f(x) = F' = G' = 8x+12$$

18

اذا كانت كل من الدالتين

$F(x) = x^2 e^{-x}$ ، $G(x) = \dfrac{x^2 - 2e^x}{e^x}$

فأجب ① اثبت ان F ، G دوال أصلية لدالة f

② أوجد الثابت c الذي تختلف به الدالتين F ، G

③ أوجد $f(x)$

$F'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-1e^{-x}) = \dfrac{2x}{e^x} - \dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

$G'(x) = \dfrac{e^x(2x - 2e^x) - (x^2 - 2e^x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x\left[2x - \cancel{2e^x} - x^2 + \cancel{2e^x}\right]}{e^{2x}}$

$= \dfrac{2x - x^2}{e^x} \longrightarrow F'(x) = G'(x)$

F ، G هما دوال أصلية لدالة f

$c = F - G = \dfrac{x^2}{e^x} - \dfrac{x^2 - 2e^x}{e^x} = \dfrac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2e^x}{e^x}$

$= \dfrac{2e^x}{e^x} = \boxed{2}$

$f(x) = F'(x) = G'(x)$

$= \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

اذا كانت F هي دالة أصلية لدالة f وكانت

$\int f(x)\,dx = e^{\sin x} + \ln(1 - x^2)$

فأوجد $f(x)$

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

$F(x) = e^{\sin x} + \ln(1 - x^2)$

$F'(x) = f(x) = \cos x \, e^{\sin x} + \dfrac{-2x}{1 - x^2}$

$f(x) = \cos x \, e^{\sin x} - \dfrac{2x}{1 - x^2}$

19

أثبت أن $F(x)=e^x \cdot \ln(x)+e^x$ هي دالة أصلية

للدالة $f(x)=e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$ في $[1,4]$

$$F'(x)=e^x\ln x+e^x\left(\frac{1}{x}\right)+e^x$$

$$=e^x\left[\ln x+\frac{1}{x}+1\right]$$

$$=e^x\left[\frac{1}{x}+\ln x+\ln e\right]$$

$$=e^x\left[\frac{1}{x}+\ln(xe)\right]=f(x)$$

$\therefore$ F هي دالة أصلية للدالة f في $[1,4]$

ملاحظة

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y$$

أثبت أن $F(x)=\sin^2 x+\ln(\sin x)$ هي دالة

$(\sin x)^2$

أصلية للدالة $f(x)=\sin 2x+\cot x$ في $[0,\frac{\pi}{3}]$

$$F'(x)=2(\sin(x))\cos x+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=2\sin x\cos x+\cot x$$

$$=\sin(2x)+\cot x$$

$$=f(x)$$

$\therefore$ F هي دالة أصلية للدالة f في $[0,\frac{\pi}{3}]$

اوجد كلا من التكاملات التالية

① $\int \left(4\sin 2x - 3\cos \pi x + \tan\frac{\pi}{4}\right)dx$

$= \int (4\sin 2x - 3\cos \pi x + 1)\,dx$

$= -\frac{4\cos 2x}{2} - \frac{3\sin \pi x}{\pi} + x + C$

$= -2\cos(2x) - \frac{3}{\pi}\sin \pi x + x + C$

---

② $\int \tan x \cdot (\cos x - 4\cot x)\,dx$

$= \int (\tan x \cos x - 4\tan x \cot x)\,dx$

$= \int \left(\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cancel{\cos x} - 4(1)\right)dx = \int (\sin x - 4)\,dx$

$= -\cos x - 4x + C$

---

③ $\int \cot x\,(\csc x + 3)\,dx$

$= \int (\cot x \cdot \csc x + 3\cot x)\,dx$

$= -\csc x + 3\ln|\sin x| + C$

---

④ $\int \left(\csc^2\frac{x}{2} - \frac{3}{\cos^2 x} + 8\sin^2 2x\,\csc^2 2x\right)dx$

$= \int \left(\csc^2\frac{x}{2} - 3\sec^2 x + 8\right)dx$

$= -\frac{\cot\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} - 3\tan x + 8x + C$

$= -2\cot\left(\frac{x}{2}\right) - 3\tan x + 8x + C$

⑤ $\int \frac{\cos x}{(1-\cos^2 x)} dx$

$$\begin{aligned} 1-\cos^2 x &= \sin^2 x \\ 1-\sin^2 x &= \cos^2 x \\ \sin^2 x+\cos^2 x &= 1 \end{aligned}$$

$= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

$= \int \left(\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx = \int (\csc x \cot x) dx$

$= -\csc x + C$

---

⑥ $\int \frac{3+\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{3+\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \left(3\sec^2 x + \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\right) dx$

$= \int (3\sec^2 x + \sec x \tan x) dx$

$= 3\tan x + \sec x + C$

---

⑦ $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

$= \int (\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x) dx$

$\boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x}$

$= \int (1 + 2\sin x \cos x) dx$

$= \int (1 + \sin 2x) dx$

$= x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$

8. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}\,dx$

$\cos(2x) =$
$\cos^2 x - \sin^2 x$
$2\cos^2 x - 1$
$1 - 2\sin^2 x$

$= \displaystyle\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x}\,dx$

$= \displaystyle\int \frac{\overset{-1}{\cancel{(\cos x - \sin x)}}(\cos x + \sin x)}{\cancel{(\sin x - \cos x)}}\,dx$

$= \int(-\cos x - \sin x)\,dx = -\sin x + \cos x + C$

9. $\displaystyle\int \underset{\text{مأنوس}}{\sin^2 x}\,dx$

$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)}$

$= \displaystyle\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

10. $\displaystyle\int \underset{\text{مأنوس}}{\cos^2 x}\,dx$

$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)}$

$= \displaystyle\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

11. $\displaystyle\int \underset{\text{مأنوس}}{\cot^2 x}\,dx$

$\boxed{\cot^2 x = \csc^2 x - 1}$

$= \displaystyle\int (\csc^2 x - 1)\,dx = -\cot x - x + c$

12. $\displaystyle\int \underset{\text{مأنوس}}{\tan^2 x}\,dx$

$\boxed{\tan^2 x = \sec^2 x - 1}$

$= \displaystyle\int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + c$

2.1

(13) $\int \frac{3x}{1+4x^4}\,dx = 3\int \frac{x}{1+(2x^2)^2}\,dx$

$(2x^2)$

$= \frac{3}{4}\int \frac{4x}{1+(2x^2)^2}\,dx = \frac{3}{4}\tan^{-1}(2x^2)+C$

---

(14) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = 5\int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$

$= \frac{5}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx = \frac{5}{2}\sin^{-1}(x^2)+C$

---

(15) $\int \frac{x^2}{4+4x^6}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\,dx$

$= \frac{1}{12}\tan^{-1}(x^3)+C$

---

(16) $\int \frac{x}{x^2\sqrt{x^4-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{|x^2|\sqrt{(x^2)^2-1}}\,dx$

$= \frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2)+C$

---

(17) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(x)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$

أوجد الدالة f حيث $f''(x) = e^{2x} + 12$; $f'(0) = 0$, $f(0) = 6$

$f'(x) = \int f''(x)\,dx$
$= \int (e^{2x} + 12)\,dx$

$f'(x) = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + \int 12\,dx$
$f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 12x + c_1$
$f'(0) = 0$

$0 = \frac{1}{2} + 0 + c_1 \rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$
$f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 12x - \frac{1}{2}$

$f(x) = \int f'(x)\,dx$
$= \int (\frac{1}{2}e^{2x} + 12x - \frac{1}{2})\,dx$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + \int 12x\,dx - \int \frac{1}{2}\,dx$
$= \frac{1}{4}e^{2x} + 6x^2 - \frac{1}{2}x + c_2$
$f(0) = 6$

$6 = \frac{1}{4} + 0 - 0 + c_2 \rightarrow$
$c_2 = \frac{23}{4}$
$f(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + 6x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{23}{4}$

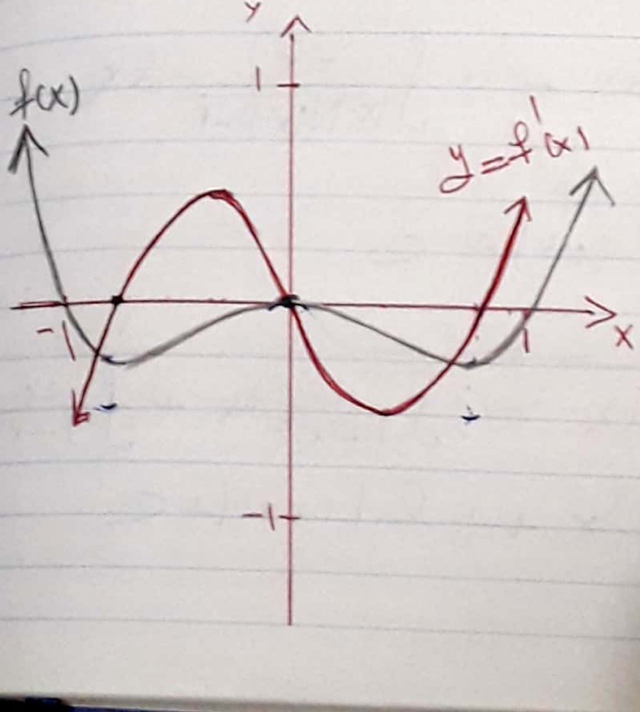
أوجد دالة الموضع اذا علمت ان السرعة للجسيم $v(t) = -12t$
وكانت الموقع الابتدائي $S(0) = 8$

$S(t) = \int v(t)\,dt = \int (-12t)\,dt$
$= -6t^2 + c \longrightarrow S(0) = 8$

$8 = c$

$S(t) = -6t^2 + 8$

من الشكل المجاور اذا كان $f'(x)$ ارسم بيان الدالة $f(x)$



$f'(x)$ درجة ثالثة
$f(x)$ درجة رابعة

x	$-\infty$		-0.7		0		0.7		∞
f'		$-$		$+$		$-$		$+$	
f		↘		↗		↘		↗	

اذا كان الحجم v يتغير بالنسبة للضغط فاذا كان معدل التغير للحجم بالنسبة من الضغط يعطى بالعلاقة

$$\frac{dv}{dP} = \frac{-a}{P^2}$$

حيث P ضغط a المتغير المربع

اوجد الدالة $V(P)$ حيث $P=\frac{1}{2}\,N/m^2$, $V=12m^3$

$$\frac{dv}{dP} = \frac{-a}{P^2}$$

$$\int dv = \int a P^{-2}\, dP$$

$$V = \frac{-aP^{-1}}{-1} + c$$

$$V = \frac{a}{P} + c$$

$V=12$
$P=\frac{1}{2}$

$$12 = \frac{a}{\frac{1}{2}} + c$$

$$12 = 2a + c \rightarrow c = 12 - 2a$$

$$\boxed{V(P) = \frac{a}{P} + 12 - 2a}$$

اوجد الدالة y حيث $\frac{dy}{dx} = 4x^2+1$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^2+1 \rightarrow dy = (4x^2+1)\,dx$$

$$\int dy = \int (4x^2+1)\,dx$$

$$y = \frac{4}{3}x^3 + x + C$$