وحدة التمهيدات –الجزء الأول

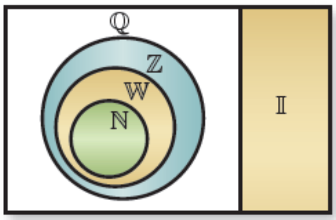
1 وصف المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية

تُستخدم الأعداد الحقيقية لوصف الكميات مثل المال والمسافة. تشمل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المجموعات الجزئية للأعداد التالية.

المفهوم الأساسي الأعداد الحقيقية

الحرف	المجموعة	أمثلة
$\mathbb{Q}$	الأرقام الحقيقية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$
$\mathbb{I}$	الأرقام غير الحقيقية	$\sqrt{3} = 1.73205...$
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
$\mathbb{W}$	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$

الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$)



يُمكن وصف مجموعات الأعداد الحقيقية هذه ومجموعات الأعداد الحقيقية الأخرى باستخدام رمز بناء المجموعات. **رمز بناء المجموعات** يستخدم خصائص الأعداد الموجودة في المجموعة لتعريف المجموعة.

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in \mathbb{Z}\}$$

مجموعة الأعداد x بحيث...

x له الخصائص المحددة...

وx هو أحد عناصر مجموعة الأعداد المحددة.

أولاً: مجموعات الأعداد

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

مجموعة الأعداد الكلية $W = \{0,1,2,3,...\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

مجموعة الأعداد غير النسبية $= I = \overline{\mathbb{Q}}$

مجموعة الأعداد الحقيقية $= (-\infty, \infty) = \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$

ملاحظات :

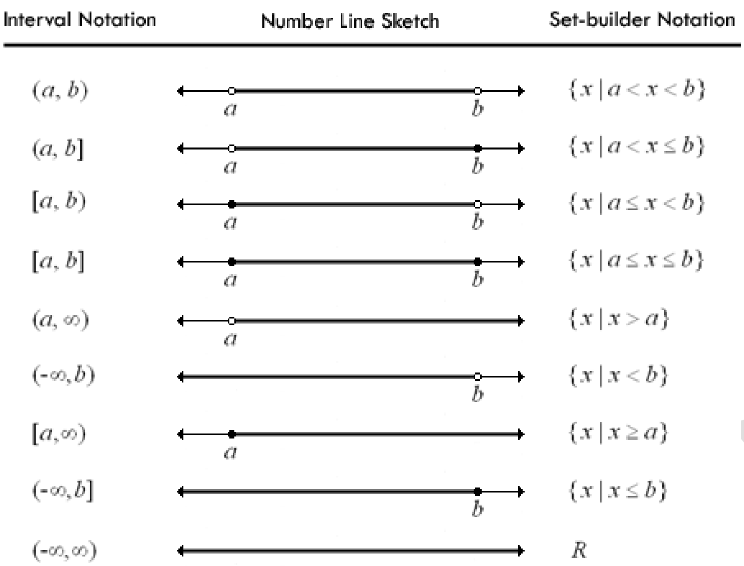
1)في المستوى الاحداثي محور x يشكل مجموعة الأعداد الحقيقية (وبالمثل المحور y)
2)جميع الأعداد التي سوف تدرسها هي أعداد حقيقية باستثناء الحالات التالية :

($\pm\infty$ ، $\frac{c \neq 0}{0}$ كمية غير معرفة ، $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة ، $\sqrt[n]{x} : x < 0$ عندn زوجي , تقدير الزوايا بالدرجات)

ثانياً:الفترات

ليكن a , b عددين حقيقين ($a,b \in \mathbb{R}$):المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية حيث $\{a \le x \le b, a,b \in \mathbb{R}\}$
والتي ترمز لها بالرمز $[a,b]$ تسمى الفترة المغلقة من a إلى b وتمثل على خط الأعداد

أمثلة على الفترات



Interval Notation	Number Line Sketch	Set-builder Notation
(a, b)	a b	$\{x \mid a < x < b\}$
$(a, b]$	a b	$\{x \mid a < x \le b\}$
$[a, b)$	a b	$\{x \mid a \le x < b\}$
$[a, b]$	a b	$\{x \mid a \le x \le b\}$
(a, ∞)	a	$\{x \mid x > a\}$
$(-\infty, b)$	b	$\{x \mid x < b\}$
$[a, \infty)$	a	$\{x \mid x \ge a\}$
$(-\infty, b]$	b	$\{x \mid x \le b\}$
$(-\infty, \infty)$		R

رمز الفترة يستخدم المتباينات لوصف المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية. تُستخدم الرموز [or] للإشارة إلى أن هناك نقطة نهاية متضمنة في الفترة. بينما تستخدم الرموز (or) للإشارة إلى عدم تضمن نقطة نهاية في الفترة. تستخدم الرموز∞. اللانهاية الإيجابية. و$-\infty$. اللانهاية السلبية لوصف إحدى الفترات اللا محدودة. تُعد الفترة لا محدودة إذا كانت تمضي إلى ما لا نهاية.

المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
المراحل المحدودة		**المراحل اللا محدودة**	
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

ثالثاً:تحليل المقادير الجبرية

❖ الفرق بين مربعين : $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

امثلة : حلل ما يلي :

$x^2-9=$	$x^2-1=$
$16x^2-\frac{25}{36}=$	$4x^2-25=$
$x^2-\frac{y^2}{49}=$	$25-\frac{4}{9}y^2=$

ملاحظة هامة جدا مجموع مربعين لا يحلل x^2+y^2 (x^2+1 لا تحلل)

❖ الفرق بين مكعبين : $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

امثلة :حلل ما يلي :

$x^3-27=$	$x^3-1=$
$64x^3-\frac{1}{27}=$	$8x^3-125=$
$x^3-\frac{y^2}{1000}=$	$1-\frac{1}{8}y^3=$

❖ مجموع مكعبين : $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

امثلة :حلل ما يلي :

$x^3+125=$	$x^3+8=$
$x^3+\frac{1}{27}=$	$64x^3+1000=$
$x^3+\frac{y^3}{216}=$	$x^3+8y^3=$

❖ اخراج العامل المشترك الأكبر:

امثلة :حلل ما يلي :

$3x-27=$	$2x+2=$
$x^3-25x=$	$x^2+5x=$
$x^4-\frac{x^2}{100}=$	$y^4-8y=$

❖ تحليل الحدودية الثلاثية : ax^2+bx+c

امثلة :حلل ما يلي :

$x^2-x-12=$	x^2+4x+3
$x^2+3x-15=$	$2x^2-8x+6=$
$3x^2-2x-5=$	$x^2+5x-24=$

ملاحظة (يمكن استخدام الآلة الحاسبة لتحليل الحدودية الثلاثية) (mode ,5 ,3)

رابعاً: فك الأقواس والتبسيط

❖ مفكوك القوس التربيعي : $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

امثلة :بسط ما يلي :

$(x-1)^2 =$	$(x+3)^2 =$
$(3-4x)^2$	$(5x+2)^2 =$
$(x^2+5)^2$	$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

ملاحظة هامة جدا : $(x \pm y)^2 \neq x^2 \pm y^2$

❖ **تبسيط واختصار الكسور :(سيتم عمل مراجعة سريعة خلال الحصة مع تدوين الملاحظات الهامة)**

امثلة :بسط ما يلي :

$\frac{x^2-9}{2x+6}$	$\frac{5x-10}{x-2} =$
$\frac{x^2+3x-15}{x^2-25}$	$\frac{x^2-x-20}{x+4}$
$\frac{3x-21}{x^2-4x-21}$	$\frac{x^2-1}{x^3+1}$

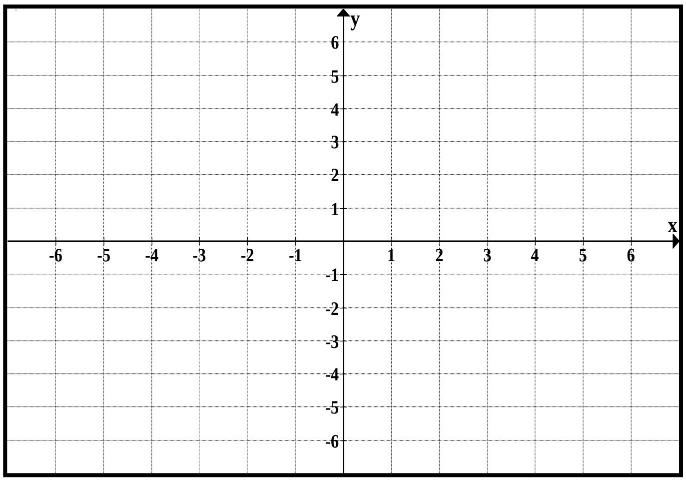
خامساً: الدوال

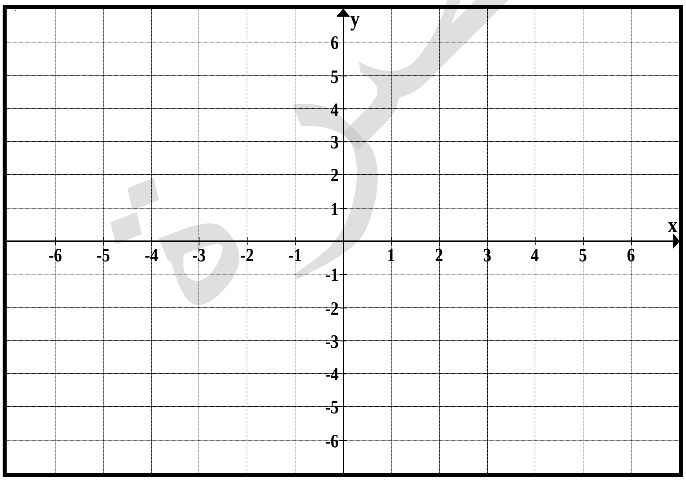
❖ كثيرات الحدود : $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (a اعداد ثابته ، n اعداد صحيحة موجبة)

من انواعها : الدالة الثابتة – الدالة التربيعية – الدالة التكعيبية

1) الدالة الثابتة: $f(x) = c$ حيث c عدد امثلة : $f(x) = 2$ ، $f(x) = \frac{2}{3}$ ، $f(x) = -\sqrt{7}$ ، $y = -3$

مثل بيانيا الدوال التالية : $f(x) = 2$ ، $y = -3$

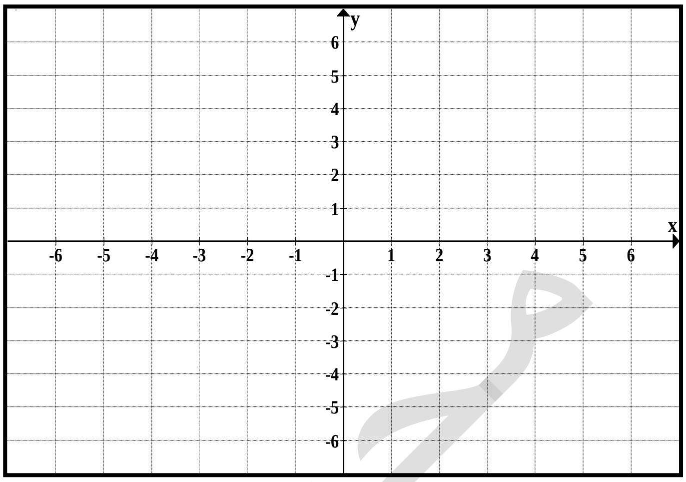


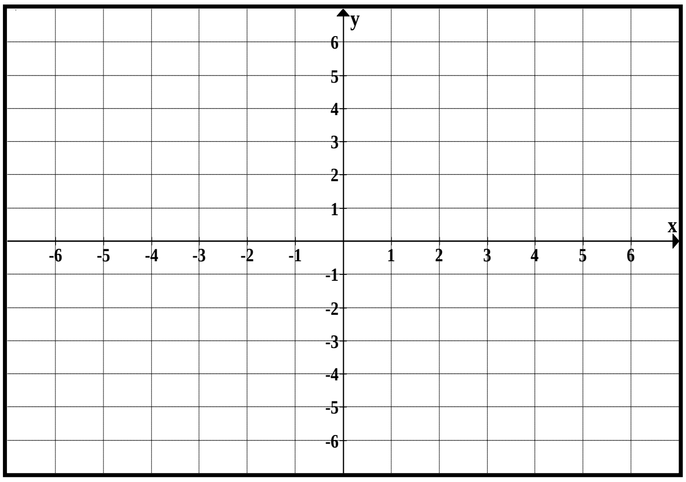


2)الدالة الخطية (الخط المستقيم) : $f(x) = ax + b$ ، $y = ax + b$ $a \neq 0$:

امثلة : $y = 3x - 4$ ، $f(x) = 1 - 2x$

مثل بيانيا الدوال التالية : $f(x)=x+2$ ، $y=-2x+3$

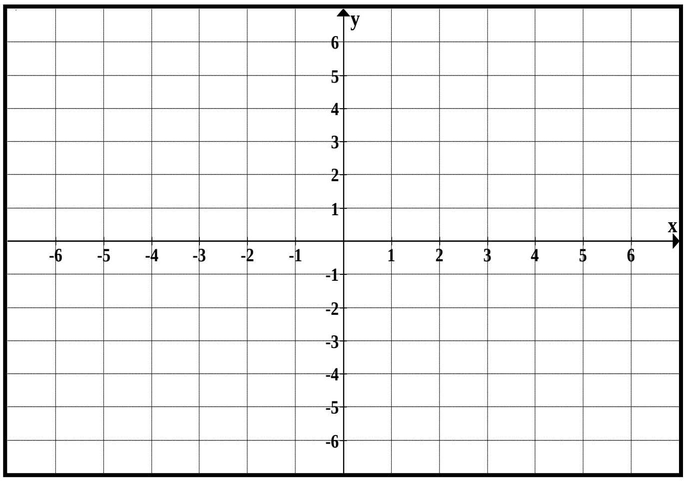


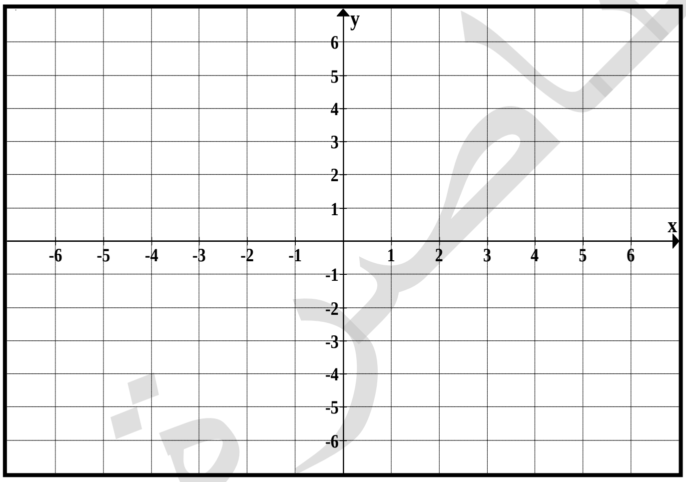


3)الدالة التربعية: $f(x)=ax^2+bx+c$ ، $y=ax^2+bx+c$ $a\neq 0$:

امثلة : $y=x^2-4x-5$ ، $f(x)=1-2x+x^2$

مثل بيانيا الدوال التالية: $f(x)=x^2-2x-3$ ، $f(x)=-x^2+x+12$

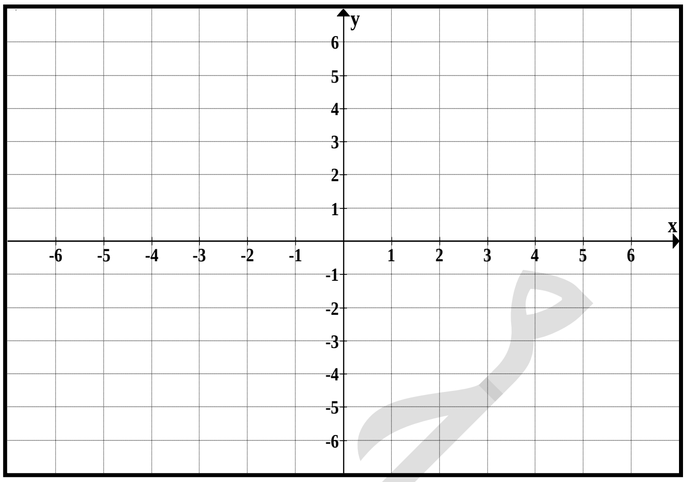
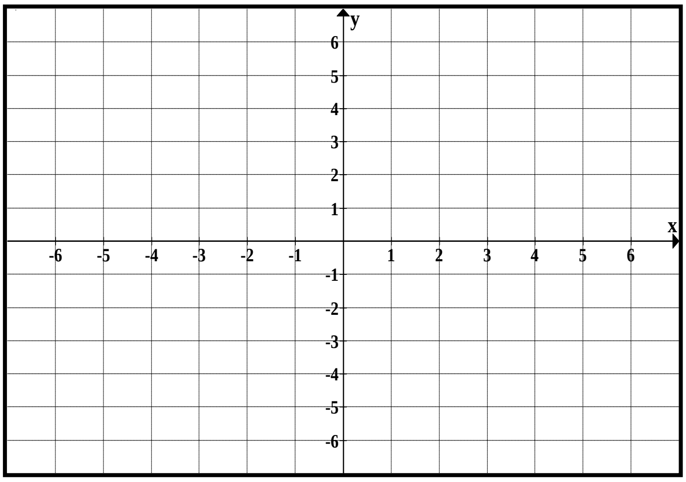




4)الدالة التكعيبية : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $a\neq 0$:

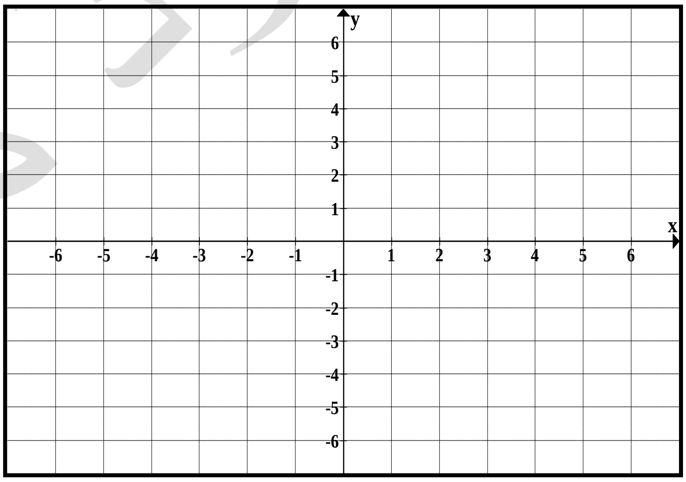
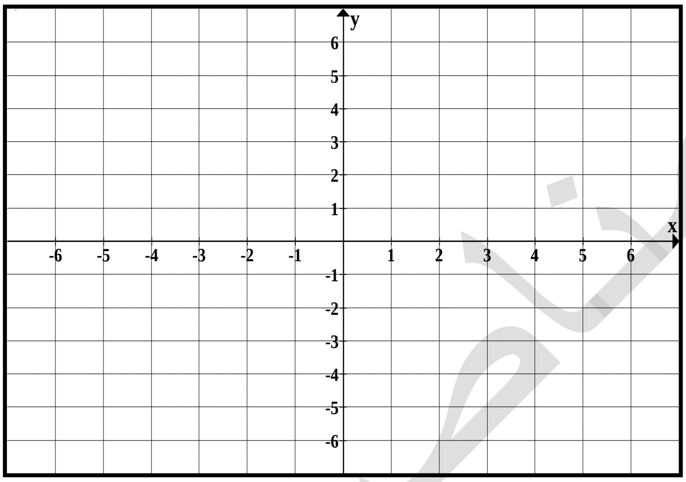
امثلة : $y=x^3-4x^2-5x+3$ ، $f(x)=x^3$

مثل بيانيا الدوال: $f(x) = x^3$ ، $y = 2 - x^3$

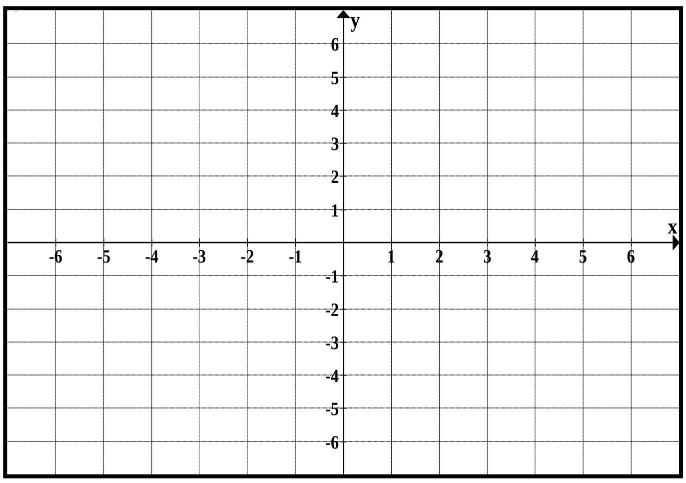
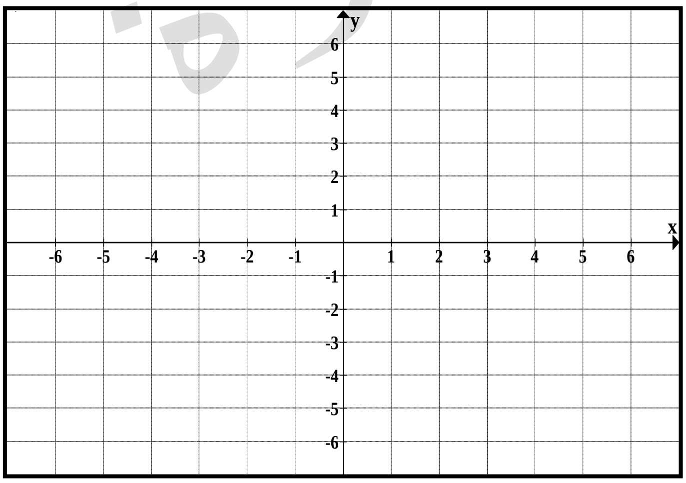
❖ الدالة النسبية: الحالة الاساسية $f(x) = \frac{1}{x}$

مثل بيانيا الدوال: $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $y = -\frac{1}{x}$

❖ دالة الجذر التربيعي: الحالة الاساسية $f(x) = \sqrt{x}$ ، $x \ge 0$

مثل بيانيا الدوال: $f(x) = \sqrt{x}$ ، $y = -\sqrt{x}$

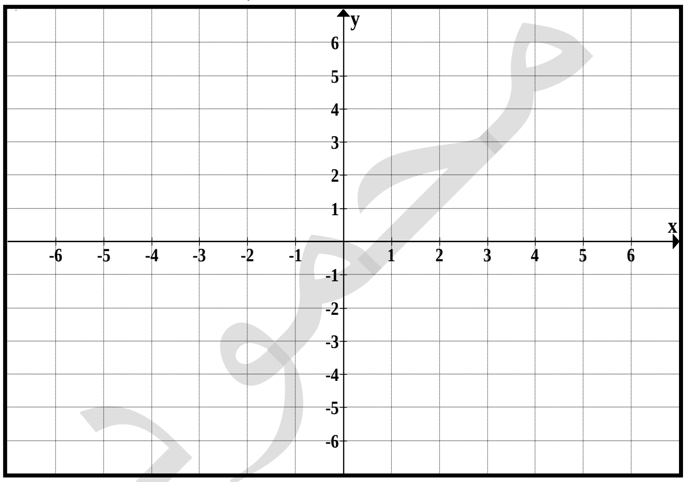



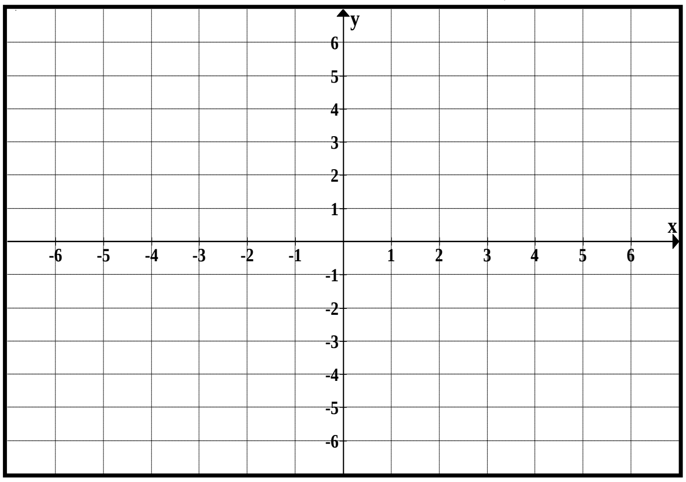
❖ الدالة المتفرعة (المتشعبة)(المعرفة باكثر من قاعدة) :

امثلة

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & ,x\le 0\\ x^2+1 & ,x>0\end{cases} \quad ، \quad f(x)=\begin{cases}x^2-4 & ,-2\le x\le 0\\ x+1 & ,0<x\le 3\end{cases} \quad ، \quad y=\begin{cases}x+1 & ,x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & ,x>0\end{cases}$$

مثل بيانيا الدوال: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ,x\le 0\\ 1-x & ,x>0\end{cases}$ ، $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & ,-2\le x\le 0\\ x+1 & ,0<x\le 3\end{cases}$





❖ الدالة القيمة المطلقة : الحالة الاساسية $f(x)=|x|$

نعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة بالخطوات التالية

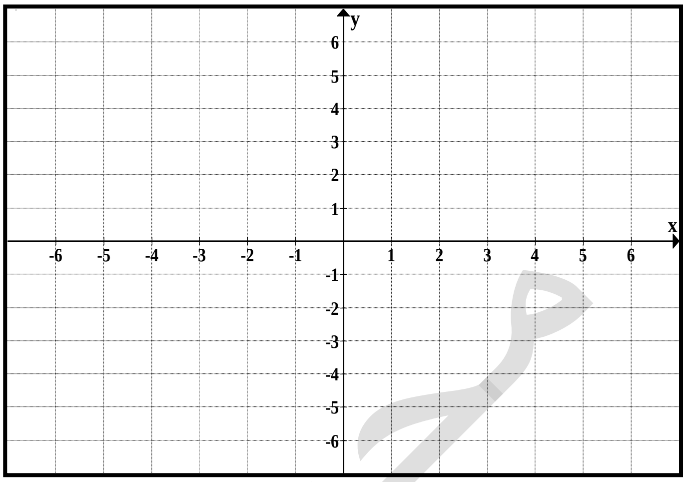
1-نجد اصفار ما بداخل القيمة المطلقة 2- نعين الاصفار على خط الاعداد وندرس الاشارة

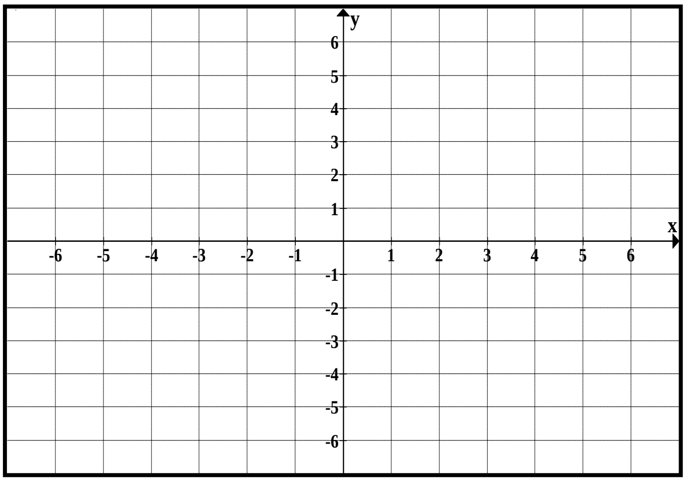
امثلة :

1) اعد تعريف الدالة $f(x)=|x|$

2) اعد تعريف الدالة $f(x)=|2x-4|$

مثل بيانيا الدوال: $f(x)=|x|$ ، $y=|2x-4|$





ملاحظات هامة

$\sqrt{x^2}=|x|$

$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

$|x+y|\neq|x|+|y|$

$|xy|=|x||y|$

التعريف 1.1

إنّ **القيمة المطلقة** لعدد حقيقي x تساوي

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \text{ إذا كان} \\ -x, & x<0 \text{ إذا كان} \end{cases}$$

تذكّر أنّه لأي عددٍ حقيقي $0<r$، تكافئ $|x|<r$ المتباينة التالية التي لا تضم قيمًا مطلقة:

$$-r<x<r$$

المثال 1.6 حل متباينة تضم قيمة مطلقة لمجموع

أوجد حلّ المتباينة

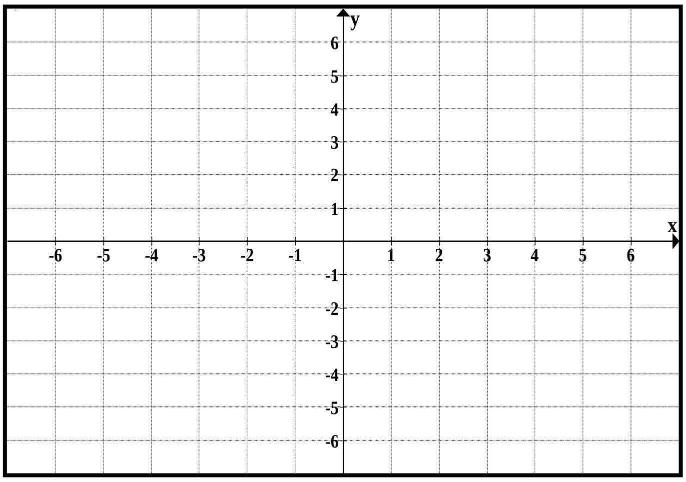
$$|x+4|\leq 7$$

❖ دالة أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي: يرمز له بالرمز $y=[x]$ ويكون الناتج دائما عدد صحيح

امثلة : $\left[-\frac{1}{10}\right]=-1$, $\left[\frac{7}{8}\right]=0$, $[-1.9]=-2$, $[2.3]=2$

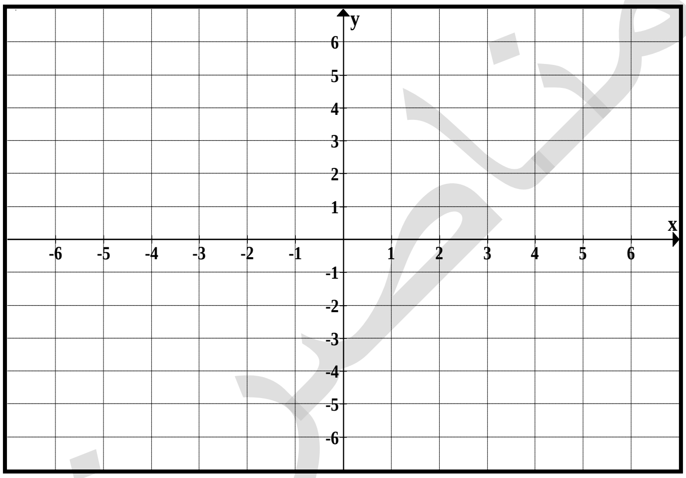
مثال : أعد تعريف $x\in[-2,2]$, $y=[x]$ ثم مثل بيانيا

$$y=\begin{cases}-2 & ,-2\le x<-1\\ -1 & ,-1\le x<0\\ 0 & ,\ 0\le x<1\\ 1 & ,\ 1\le x<1\\ 2 & ,\ x=2\end{cases}$$



مثال : أعد تعريف $x\in[-1,1]$, $y=[2x-1]$ ثم مثل بيانيا

$$y=\begin{cases}-3 & ,-1\le x<-\frac{1}{2}\\ -2 & ,-\frac{1}{2}\le x<0\\ -1 & ,\ 0\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & ,\ \frac{1}{2}\le x<1\\ 1 & ,\ x=1\end{cases}$$



تذكر أنّ المسافة بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هي نتيجةٌ بسيطةٌ لنظرية فيثاغورس المعطاة بالصيغة:

$$d\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

المثال 1.8 استخدام قانون المسافة

أوجد المسافة بين النقطتين $(1, 2)$ و$(3, 4)$.

التعريف 1.2

الحل $x_1 \neq x_2$ فإنّ **ميل** الخط المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) يساوي العدد

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1.5}$$

حين يكون $x_1 = x_2$ و $y_1 \neq y_2$ فإن الخط المستقيم الذي يمرّ من خلال (x_1, y_1) و(x_2, y_2) يكون **رأسيًا** ويكون الميل غير معرّف.

المثال 1.9 إيجاد ميل مستقيم

أوجد ميل المستقيم الذي يمرّ عبر $(2, 5)$ و$(4, 3)$.

المثال 1.10 استخدام الميل لتحديد ما إذا كانت النقاط متسامتة

استخدم الميل لتحدّد ما إذا كانت النقاط $(1,2)$، $(3,10)$، $(4,14)$ متسامتة.

صيغة النقطة والميل

$$y = m(x - x_0) + y_0 \tag{1.7}$$

المثال 1.12 إيجاد معادلة مستقيم بدلالة نقطتين

أوجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين (3,1) و(-1 ,4) ومثّله بيانيًا.

النظرية 1.2

يكون مستقيمان (غير رأسيين) **متوازيين** إذا كان لهما الميل نفسه. **وأي** مستقيمين رأسيين هما متوازيان حكمًا. يكون مستقيمان (غير رأسيين) ميلاهما m_1 و m_2 **متعامدين** عندما يساوي ناتج ضرب ميليهما -1 (أي $m_1 \cdot m_2 = -1$). كذلك فإن أي مستقيمين أحدهما رأسي والثاني أفقي هما متعامدان حكمًا.

المثال 1.13 إيجاد معادلة مستقيم موازٍ

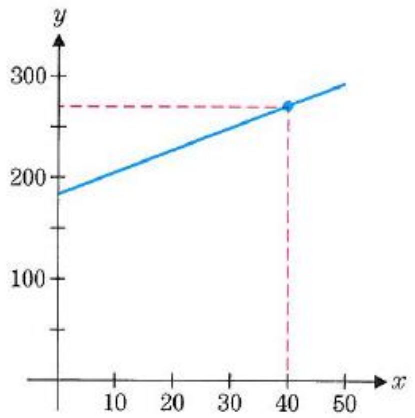
أوجد معادلة مستقيم موازٍ لـــ $y = 3x - 2$ ويمرّ بالنقطة (-1, 3)

المثال 1.14 إيجاد معادلة مستقيمٍ عمودي

أوجد معادلة مستقيم عمودي على $y = -2x + 4$ ويقطع المستقيم عند النقطة (1,2)

المثال 1.15 استخدام مستقيمٍ للتنبؤ بالتعداد السكاني

من بيانات التعداد السكاني الخاصة بإحصاء عدد السكان خلال الأعوام 1960 و1970 و1980 و1990 في المثال 1.8. تنبّأ بالتعداد السكاني للعام 2000.



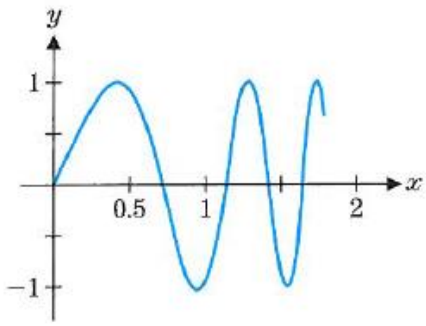
التعريف 1.3

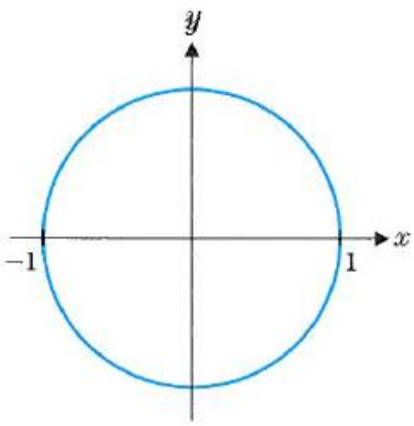
إنّ **الدالة** f هي قاعدةٌ تربط بين العنصر الواحد بالضبط في مجموعة B مع كل عنصر x في مجموعة A وفي هذه الحالة، نكتب $y = f(x)$.

تُعرف المجموعة A **بمجال** f وتُعرّف مجموعة كل القيم $f(x)$ في B **بمدى** f. ويكتب على أنه $\{y \mid y = f(x)$، لكل $x \in A\}$. ما لم يرد خلاف ذلك، حين تعطى دالةٌ صيغتها f وفق تعبير محدد، فإن مجال f هو أكبر مجموعة من الأعداد الحقيقية التي يكون فيها التعبير معرّفًا. نشير إلى x على أنه **المتغيّر المستقل** وإلى y على أنه **المتغيّر التابع**.

المثال 1.16 استخدام اختبار المستقيم الرأسي

حدّد المنحنيات البيانية الواردة في الشكلين 1.18a و1.18b والتي تقابل دوالًا.





التعريف 1.4

إنّ كثيرة **الحدود** هي الدالة التي يمكن كتابتها بالصيغة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1 x + a_0$$

وفيها a_0, a_1, a_2، ... a_n أعداد حقيقية (**معاملات** كثيرة الحدود) حيث $a_n \neq 0$ و$n \geq 0$ عدد صحيح (**درجة** كثيرة الحدود).

المثال 1.17 عينات لكثيرات حدود

نورد في ما يلي أمثلةً عن كثيرات حدود:

$f(x) = 2$ كثيرة حدود من الدرجة 0 او ثابت

$f(x) = 3x + 2$ كثيرة حدود من الدرجة 1 أو خطية

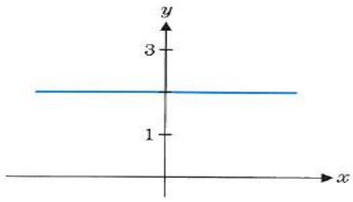
$f(x) = 5x^2 - 2x + 2/3$ كثيرة حدود من الدرجة 2 أو تربيعية

$f(x) = x^3 - 2x + 1$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو تكعيبية

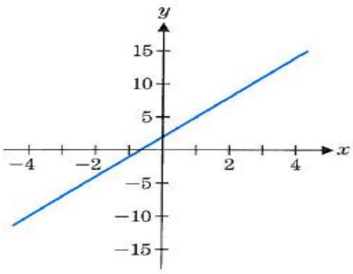
$f(x) = -6x^4 + 12x^2 - 3x + 13$ كثيرة حدود من الدرجة الرابعة

و

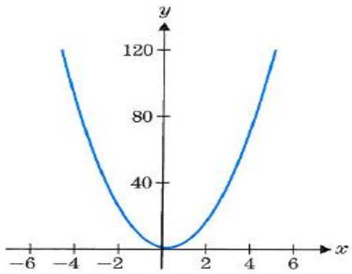
$f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2 + x - 3$ (كثيرة حدود من الدرجة الخامسة)



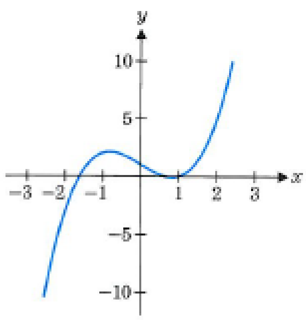
الشكل 1.20a
$f(x) = 2$



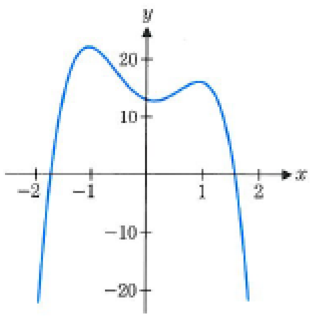
الشكل 1.20b
$f(x) = 3x + 2$



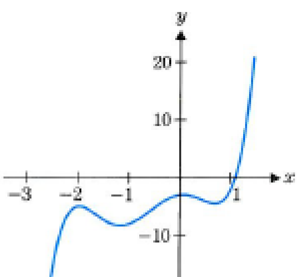
الشكل 1.20c
$f(x) = 5x^2 - 2x + 2/3$



الشكل 1.20d
$f(x) = x^3 - 2x + 1$



الشكل 1.20e
$f(x) = -6x^4 + 12x^2 - 3x + 13$



الشكل 1.20f
$f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2 + x - 3$

التعريف 1.5

تدعى أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث ان p وq كثيرتا حدود، **بالدالة النسبية**.

المثال 1.18 الدالة النسبية البسيطة

أوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 7x - 11}{x^2 - 4}$

المثال 1.19 إيجاد مجال دالة تضم جذرًا تربيعيًا أو تكعيبيًا

أوجد المجال لكل من $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و$g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$.

المثال 1.20 إيجاد الأصفار بالتحليل إلى العوامل

أوجد كل نقاط التقاطع مع المحورين x وy للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

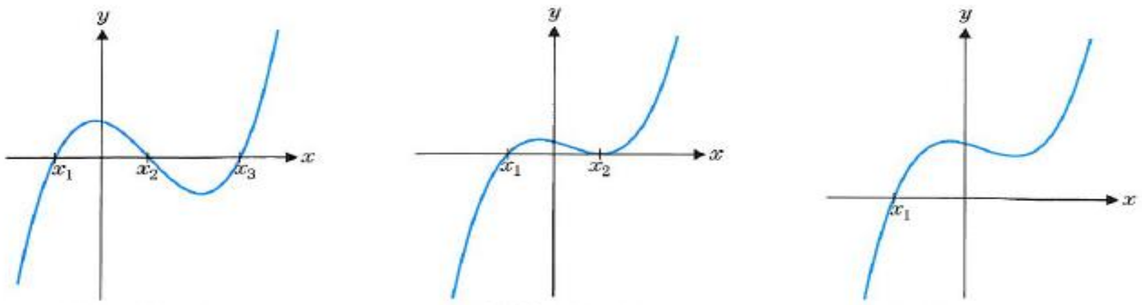
المثال 1.21 إيجاد الأصفار باستخدام الصيغة التربيعية

أوجد أصفار $f(x) = x^2 - 5x - 12$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

النظرية 1.3

للدوال التي درجتها n يوجد على الأكثر n صفرًا متمايزًا أو مختلفًا.



الشكل 1.23a
صفر واحد

الشكل 1.23b
صفران اثنان

الشكل 1.23c
ثلاثة أصفار

النظرية 1.4 (نظرية العامل)

لأي دالة كثيرة الحدود f، فإن $f(a) = 0$ إذا وفقط إذا كان $(x - a)$ عاملاً للدالة $f(x)$.

تمرين : اذا كانت $f(x) = x^2 + ax - 8$ تحوي عاملا $x - a$ ، اوجد قيمة a

في التمارين 43-48، أوجد مجال الدالة.

43. $f(x) = \sqrt{x+2}$

44. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

45. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{x - 5}$

46. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{9 - x^2}}$

47. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$

48. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2x - 6}$

المثال 1.23 إيجاد نقاط تقاطع مستقيم مع قطعٍ مكافئ

أوجد نقاط تقاطع القطع المكافئ $y = x^2 - x - 5$ والمستقيم $y = x + 3$.

في التمارين 10-1، أوجد حلّ المتباينة.

1. $3x + 2 < 8$
2. $3 - 2x < 7$
3. $1 \le 2 - 3x < 6$
4. $-2 < 2x - 3 \le 5$
5. $\dfrac{x+2}{x-4} \ge 0$
6. $\dfrac{2x+1}{x+2} < 0$
7. $x^2 + 2x - 3 \ge 0$
8. $x^2 - 5x - 6 < 0$
9. $|x + 5| < 2$
10. $|2x + 1| < 4$

في التمارين 18-15، أوجد (a) المسافة بين النقطتين، و(b) ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين المعطيتين، و(c) معادلة للمستقيم الذي يمرّ بالنقطتين.

15. $(1, 2), (3, 6)$
16. $(1, -2), (-1, -3)$
17. $(0.3, -1.4), (-1.1, -0.4)$
18. $(1.2, 2.1), (3.1, 2.4)$

في التمارين 22-19، أوجد نقطةً ثانيةً على المستقيم الذي ميله m وتقع عليه النقطة P ومثّل المستقيم وأوجد معادلةً له.

19. $m = 2, P = (1, 3)$
20. $m = 0, P = (-1, 1)$
21. $m = 1.2, P = (2.3, 1.1)$
22. $m = -\frac{1}{4}, P = (-2, 1)$

في التمرينات 29-32، أوجد معادلة مستقيم يمرّ بالنقطة المعطاة إضافةً إلى (a) مستقيم موازٍ و(b) آخر عمودي على المستقيم المعطى.

29. $y = 2(x+1) - 2$ at $(2, 1)$

30. $y = 3(x-2) + 1$ at $(0, 3)$

31. $y = 2x + 1$ at $(3, 1)$

32. $y = 1$ at $(0, -1)$

في التمارين 43-48، أوجد مجال الدالة.

43. $f(x) = \sqrt{x+2}$

44. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

45. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{x - 5}$

46. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{9 - x^2}}$

47. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$

48. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2x - 6}$

الدوال العكسية :

التعريف 2.1

افترض أنّ لـــ f و g المجالين A و B على الترتيب، وأنّ $f(g(x))$ معرّفة من أجل كل قيم $x \in B$ وأنّ $g(f(x))$ معرّفة من أجل كل قيم $x \in A$ إذا كان

$f(g(x)) = x$، من أجل كل قيم $x \in B$، و

$g(f(x)) = x$، من أجل كل قيم $x \in A$.

فإننا نقول إنّ g هي الدالة **العكسية** لـــ f وتكتب بالصيغة $g = f^{-1}$ وبصورةٍ مكافئة، f هي الدالة العكسية لـــ g ، $f = g^{-1}$.

النظرية 2.1

يكون للدالة f دالة عكسية إذا وفقط إذا دالة واحد لواحد.

المثال 2.3 **إيجاد دالة عكسية**

أوجد معكوس الدالة $f(x) = x^3 - 5$

في التمرينات 1-4، بيّن أنّ $f(g(x)) = x$ و $g(f(x)) = x$ من أجل كل قيم x:

1. $f(x) = x^5$ و $g(x) = x^{1/5}$
2. $f(x) = 4x^3$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^{1/3}$

في التمرينات 13-18، افترض أنّ للدالةِ دالةً عكسية. أوجد قيم الدالة المحددة بدون الحلّ لإيجاد الدالة العكسية.

13. $f(x) = x^3 + 4x - 1,$ (a) $f^{-1}(-1),$ (b) $f^{-1}(4)$
14. $f(x) = x^3 + 2x + 1,$ (a) $f^{-1}(1),$ (b) $f^{-1}(13)$

الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية :

التعريف 3.1

تكون الدالة f **دورية و زمنها الدوري** T إذا كان

$$f(x+T)=f(x)$$

من أجل كل قيم x بحيث يكون x و $x+T$ في مجال f. وتدعى أصغر قيمة $T>0$ لهذا العدد بالزمن الدوري الأساسي.

ملحوظة 3.1

نقيس الزوايا دائمًا بالقياس الدائري بوحدة الــ(*radian*) ما لم يذكر خلاف ذلك.

النظرية 3.1

الدوال $f(\theta)=\sin\theta$ و $g(\theta)=\cos\theta$ تمثل دوال دورية. ودورتها 2π.

لاحظ أنه يمكنك إجراء انسحاب للتمثيل البياني لـ $y=\sin x$ إلى اليمين أو اليسار وتحصل على صورة طبق الأصل من التمثيل البياني لــ $y=\cos x$، وبالتحديد لدينا العلاقة

$$\boxed{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x}$$

مثال 3.1 حل المعادلات التي تحتوي على الــ sin و الــ cos

أوجد جميع حلول المعادلات (a) $2\sin x-1=0$ و (b) $\cos^2 x-3\cos x+2=0$.

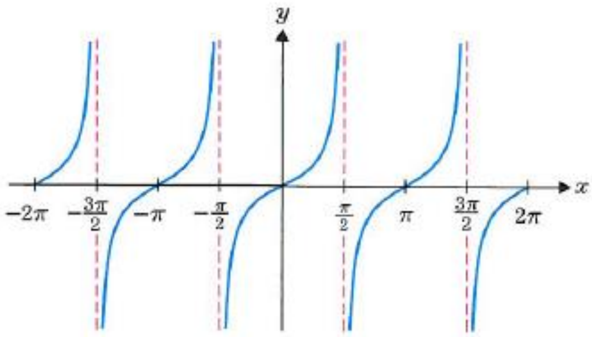
التعريف 3.2

دالة الظلّ معرفة كما يلي $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

دالة ظلّ التمام معرفة كما يلي $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

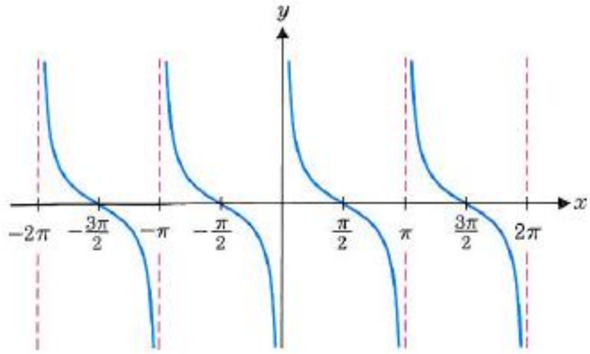
دالة القاطع معرفة كما يلي $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

دالة قاطع التمام معرفة كما يلي $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$



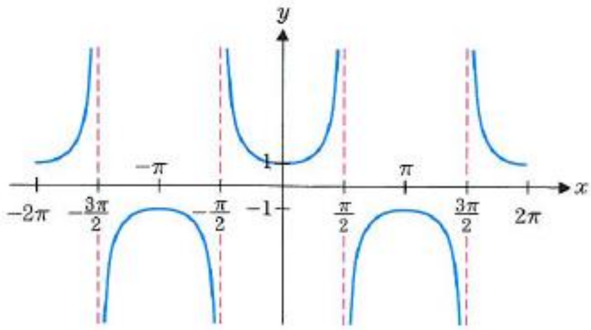
الشكل 1.40a

$y = \tan x$



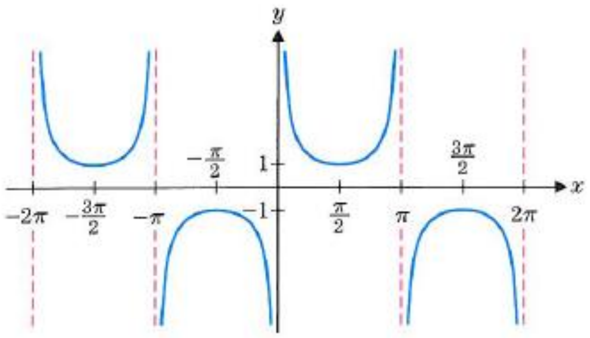
الشكل 1.40b

$y = \cot x$



الشكل 1.40c

$y = \sec x$

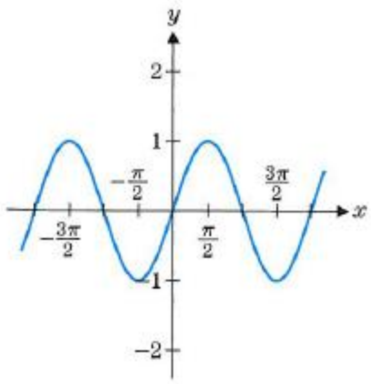


الشكل 1.40d

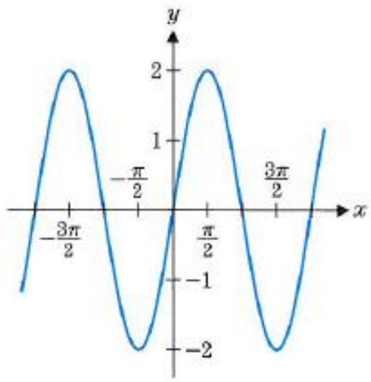
$y = \csc x$

مثال 3.2 تبديل السعة والدورة

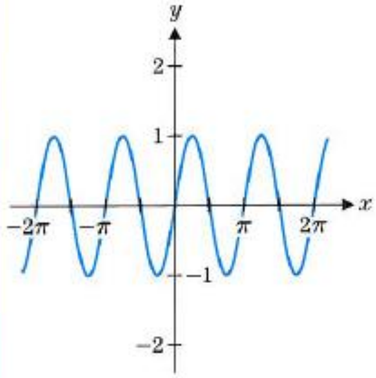
مثّل $y = 2\sin x$ و $y = \sin 2x$ بيانيا ووضح طريقة اختلاف كل منهما عن التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ (انظر الشكل 1.41a).



الشكل 1.41a
$y = \sin x$



الشكل 1.41b
$y = 2\sin x$



الشكل 1.41c
$y = \sin(2x)$

مثال 3.3 إيجاد السعة والدورة والتكرار

أوجد السعة والدورة والتكرار لكلٍ من (a) $f(x) = 4\cos 3x$ و (b) $g(x) = 2\sin(x/3)$

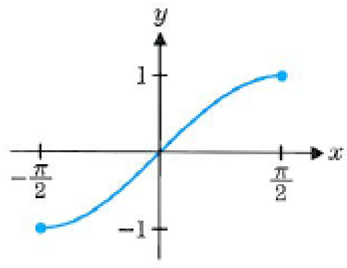
النظرية 3.2

لأي عددين حقيقيين α و β ، نحصل على المتطابقات التالية:

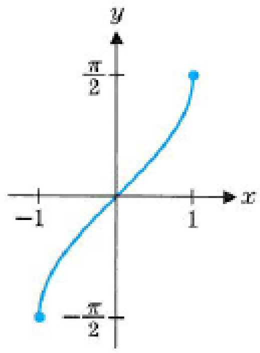
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \quad (3.1)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (3.2)$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad (3.3)$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad (3.4)$$

الدوال المثلثية العكسية :

$y = \sin^{-1} x$ اذا وفقط اذا $\sin y = x$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



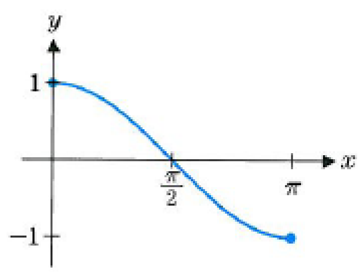
الشكل 1.43
$y = \sin x$ on $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



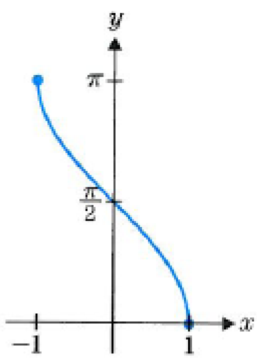
الشكل 1.44
$y = \sin^{-1} x$

مثال 3.5 قيمة دالة معكوس الجيب
أوجد قيمة (a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و (b) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$y = \cos^{-1} x$ اذا وفقط اذا كان $\cos y = x$ و $0 \le y \le \pi$.



الشكل 1.45
$y = \cos x$ on $[0, \pi]$

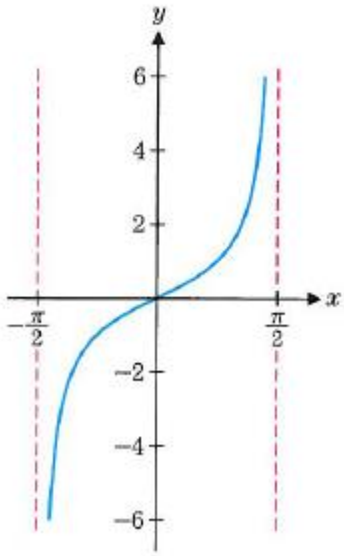


الشكل 1.46
$y = \cos^{-1} x$

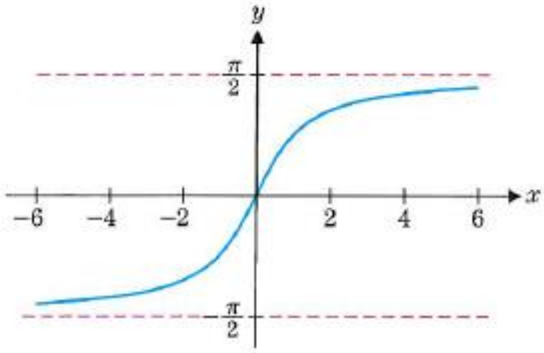
مثال 3.6 قيمة دالة معكوس جيب التمام
أوجد قيمة (a) $\cos^{-1}(0)$ و (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$y = \tan^{-1} x$ اذا وفقط اذا $\tan y = x$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

عندها، يمكن إيجاد التمثيل البياني لِ $y = \tan^{-1} x$ كما هو موضّح في الشكل 1.48 عبر عكس التمثيل البياني في الشكل 1.47 من خلال المستقيم $y = x$.



الشكل 1.47
$y = \tan x$ on $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



الشكل 1.48
$y = \tan^{-1} x$

مثال 3.7 **إيجاد قيمة معكوس الظلّ**

أوجد قيمة $\tan^{-1}(1)$.

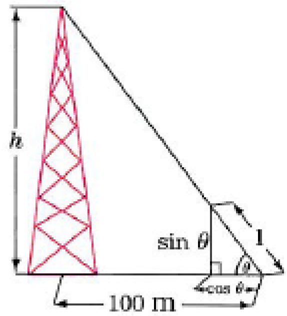
$y = \sec^{-1} x$ اذا وفقط اذا كان $\sec y = x$ و $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

مثال 3.8 **إيجاد قيمة معكوس القاطع**

أوجد قيمة $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$.

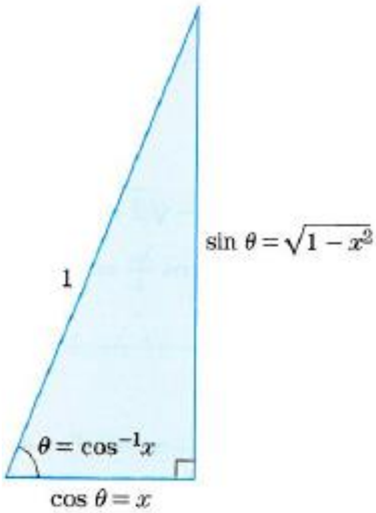
مثال 3.9 إيجاد ارتفاع برج

يقف شخص على بعد 100 متر من قاعدة برج ويكون قياس الزاوية عنده من الأرض إلى قمة البرج $60°$ (انظر الشكل 1.51). (a) أوجد ارتفاع البرج. (b) ما قياس الزاوية إذا كان الشخص يبعد 200 متر عن القاعدة؟



مثال 3.10 تبسيط التعبيرات التي تحتوي على دوال مثلثية معكوسة

بسط، (a) $\sin(\cos^{-1} x)$ و (b) $\tan(\cos^{-1} x)$.



الدوال الاسية واللوغاريتمية :

قواعد الأسس (من أجل x, y > 0)

- لأية أعدادٍ صحيحة m و n $(n \geq 2)$.

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

- لأية أعدادٍ حقيقية p.

$$(xy)^p = x^p \cdot y^p, \quad x^{-p} = \frac{1}{x^p} \quad \text{و} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}$$

- لأية أعدادٍ حقيقية p و q .

$$(x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

- لأية أعدادٍ حقيقية p و q .

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q} \quad \text{و} \quad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$$

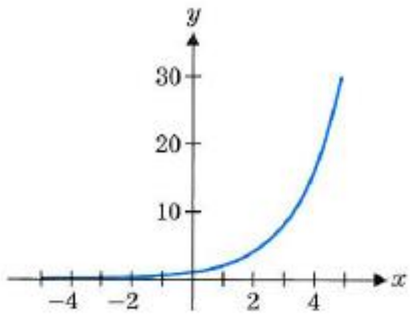
مثال 4.1 تحويل التعبيرات إلى الشكل الأسي

حوِّل كل تعبير إلى الشكل الأسي: (a) $3\sqrt{x^5}$، (b) $\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$، (c) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x}}$ و (d) $(2^x \cdot 2^{3+x})^2$

مثال 4.3 رسم التمثيلات البيانية الأسية

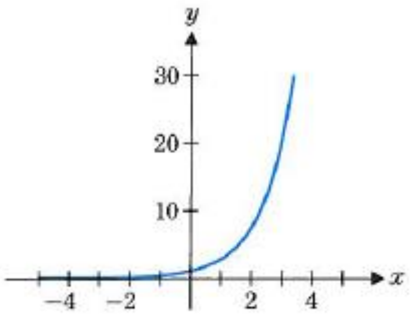
ارسم التمثيلات البيانية للدوال الأسية $y = 2^x$، $y = e^x$، $y = e^{2x}$، $y = e^{x/2}$، $y = (1/2)^x$، و $y = e^{-x}$.

الحل باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب، يجب أن تحصل على تمثيلات بيانية مماثلة لما يلي.



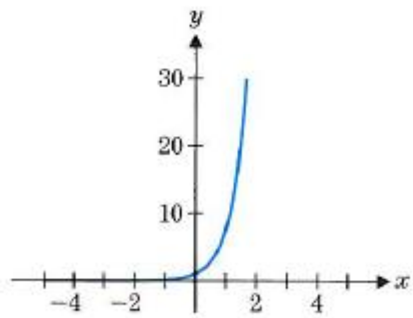
الشكل 1.53a

$y = 2^x$



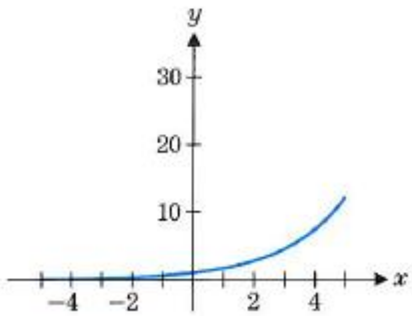
الشكل 1.53b

$y = e^x$



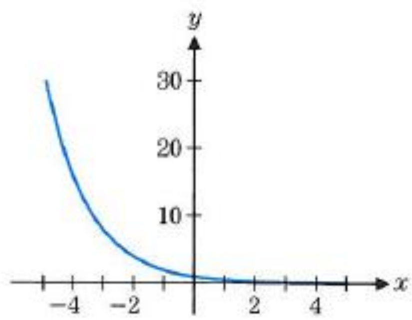
الشكل 1.54a

$y = e^{2x}$



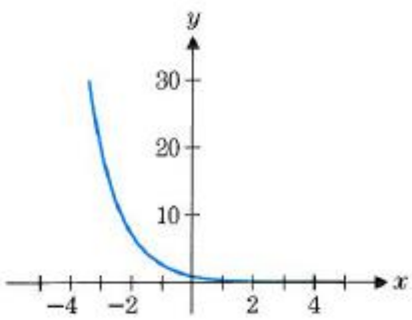
الشكل 1.54b

$y = e^{x/2}$



الشكل 1.55a

$y = (1/2)^x$

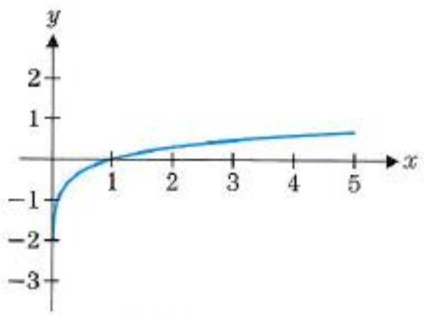


الشكل 1.55b

$y = e^{-x}$

التعريف 4.2
لأيّ عدد موجب $b \neq 1$، تُعرّف الدالة اللوغاريتمية التي أساسها b، و يرمز إليها بالعلاقة

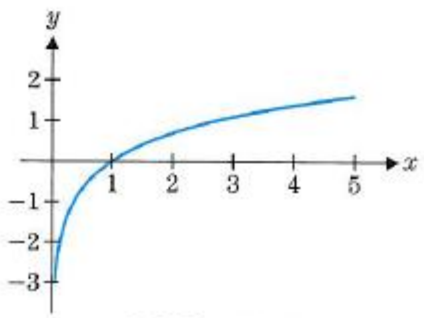
$y = \log_b x$ إذا وفقط إذا $x = b^y$



الشكل 1.56a
$y = \log x$

مثال 4.5 حل معادلة لوغاريتمية

حل المعادلة $\ln(x+5) = \ln 3$ من أجل x.



الشكل 1.56b
$y = \ln x$

مثال 4.6 حل معادلة أسية

حل المعادلة $e^{x+4} = 7$ من أجل x.

نظرية 4.1
لأي أس موجب $b \neq 1$،
(i) $\log_b x$ يُحدد فقط لـ $x > 0$.
(ii) $\log_b 1 = 0$ و
(iii) إذا كانت $b > 1$، إذن $\log_b x < 0$ لـ $0 < x < 1$ و $\log_b x > 0$ لـ $x > 1$.

نظرية 4.2
لأي أساس موجب $b \neq 1$ وأي أعداد موجبة x و y، لدينا
(i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
(ii) $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$
(iii) $\log_b(x^y) = y \log_b x$

مثال 4.8 تبسيط التعبيرات اللوغاريتمية

اكتب كلًا مما يلي في صورة لوغاريتم مفرد: (a) $\log_2 27^x - \log_2 3^x$ و (b) $\ln 8 - 3\ln(1/2)$.

مثال 4.9 بسط التعبير اللوغاريتمي

استخدم قواعد اللوغاريتمات لتبسيط التعبير $\ln\left(\frac{x^3y^4}{z^5}\right)$.

باستخدام قواعد الأسس واللوغاريتمات، يمكننا إعادة صياغة أي دالة أسية كدالة أسية لها أساس e على النحو التالي. لأي أساس $a > 0$ لدينا

$$\boxed{a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln a}} \qquad (4.3)$$

ينتج ذلك من النظرية 4.2 (iii) وحقيقة أنّ $e^{\ln y} = y$ للجميع $y > 0$.

مثال 4.10 إعادة صياغة الدالة الأسية كدالة أسية لها أساس e

أعد صياغة الدوال الأسية 2^x، 5^x و $(2/5)^x$ كدوال أسية لها أساس e.

$$\boxed{\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \text{ اذا } b > 0 \text{، } b \neq 1 \text{ و } x > 0} \qquad (4.4)$$

مثال 4.11 تقريب قيمة اللوغاريتمات

قم بتقريب قيمة $\log_7 12$

الدوال الزائدية : $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ و $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

مثال 4.12 حساب قيم الدوال الزائدية

احسب $f(0)$، $f(1)$، و $f(-1)$، وحدد طريقة مقارنة $f(x)$ و $f(-x)$ لكل دالة: (a) $f(x) = \sinh x$ و (b) $f(x) = \cosh x$.

مثال 4.13 مطابقة البيانات لمنحنى الدالة الأسية

أوجد الدالة الأسية للشكل $f(x) = ae^{bx}$ الذي يمرّ خلال النقاط $(0, 5)$ و $(3, 9)$.

تحويلات الدوال :

التعريف 5.1

افترض أنّ f و g عبارة عن دالتين بمجالات D_1 وD_2، على التوالي. أحدد الدوال $f+g$، $f-g$ و $f \cdot g$ عن طريق

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

و

لكل x في $D_1 \cap D_2$ (أي $x \in D_1$، و $x \in D_2$). تُحدد الدالة $\frac{f}{g}$ عن طريق

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

لكل x في $D_1 \cap D_2$ بحيث $g(x) \neq 0$.

المثال 5.1 تركيبات الدوال

إذا كانت $f(x) = x - 3$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ فحدد الدوال $f+g$ ، $3f-g$ و $\frac{f}{g}$ مع ذكر مجال كل منها.

التعريف 5.2

يُحدد **تركيب** الدوال f و g، المكتوب بالشكل $f \circ g$، عن طريق

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لكل x حيث x هي مجال g و $g(x)$ هي مجال f.

المثال 5.2 إيجاد تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$. فحدد الدوال $f \circ g$ و $g \circ f$ مع ذكر مجال كل منها.

الازاحة الافقية والازاحة الرأسية :

بشكل عام، يكون التمثيل البياني لـ $y = f(x) + c$ مشابهًا للتمثيل البياني لـ $y = f(x)$ منتقلًا إلى أعلى (إذا كان $c > 0$) أو إلى أسفل (إذا كان $c < 0$) بمقدار $|c|$ وحدات. عادةً ما نشير إلى $f(x) + c$ بوصفه ازاحة رأسية (لأعلى أو لأسفل بمقدار $|c|$ وحدات).

بشكل عام، وبالنسبة لـ $c > 0$، يكون التمثيل البياني لـ $y = f(x - c)$ هو التمثيل البياني نفسه لـ $y = f(x)$ منتقلًا بمقدار c وحدة جهة اليمين. وبالمثل، (مرة أخرى، بالنسبة لـ $c > 0$)، تحصل على التمثيل البياني لـ $y = f(x + c)$ بتحريك التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ جهة اليسار بمقدار c وحدة. عادةً ما نشير إلى $f(x - c)$ و $f(x + c)$ بوصفهما **الإزاحة الأفقية** (اليمنى واليسرى، على التوالي، بمقدار c وحدة).

في التمرينات 31–38، استخدم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ الموضّح في الشكل لتمثيل الدالة المُشار إليها بيانيًا.

31. $f(x-4)$ **32.** $f(x+3)$ **33.** $f(2x)$

34. $f(2x-4)$ **35.** $f(3x+3)$ **36.** $3f(x)$

37. $2f(x)-4$ **38.** $3f(x)+3$