1

40

السؤال الأول

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

1) حدد مجال الدالة $g(x)=\sqrt{2x-12}$.

a) $(-\infty,6]$ b) $[6,\infty)$
c) $[-6,\infty)$ d) $(-\infty,\infty)$

$2x-12\geq 0$
$2x\geq 12$
$x\geq 6$
$[6,\infty)$

2) أوجد معادلة مستقيم عمودي على $y=\frac{1}{3}x-5$ ويمر بالنقطة $(0,2)$.

$m_1=\frac{1}{3}$
$m=-3$

a) $y=\frac{-1}{3}x-2$ b) $y=\frac{1}{3}x+2$
c) $\boxed{y=-3x+2}$ d) $y=-3x-2$

$y=-3(x-0)+2$
$y=-3x+2$

3) حدد الدالة التي يوجد لها دالة عكسية .

بيانياً (اختبار الخط المستقيم الأفقي يمر بنقطة واحدة)
جبرياً واحد لواحد
$x_1\neq x_2$
$f(x_1)\neq f(x_2)$

a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ No b) $f(x)=x^2-4$ No
c) $f(x)=-1$ d) $f(x)=x^3-2$

$x=-1 \rightarrow f(-1)=\sqrt{2}$
$x=1 \rightarrow f(1)=\sqrt{2}$

4) حدد الدورة للدالة $f(x)=3\cos(2x-\pi)$.

$f(x)=3\cos\left[2(x-\frac{\pi}{2})\right]+0$

a) 3 b) π
c) $\frac{2}{\pi}$ d) $\frac{\pi}{2}$

بالضرب $|a|$ اضافة k

الدورة (الفترة) $\frac{2\pi}{|b|}=\pi$ | السعة $|a|=3$ | التردد $\frac{1}{\pi}$ | المجال $\mathbb{R}$ | المدى $[-3,3]$ | الإزاحة الطور $h=\frac{\pi}{2}$ | الإزاحة الرأسية $k=0$ لا يوجد

Scanned by CamScanner

5) أوجد حل المعادلة الأسية $e^{2\ln x} = 4$.

مجال الدالة قبل حل المعادلة

$x > 0$

$e^{\ln x^2} = 4$

$x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2$

a) ± 2

b) 4

$\boxed{\text{c) } 2}$

d) 16

6) أوجد قيمة الدالة المعكوسة $\theta = \csc^{-1}(2)$.

$\csc\theta = 2$

$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{2}{1}$

$2\sin\theta = 1$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$\boxed{\text{a) } \frac{\pi}{6}}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{3}$

d) $\frac{2\pi}{3}$

7) إذا كانت $f(x) = x^2 + 1, g(x) = \sec x$، أوجد $(f \circ g)(x)$

$f(\sec x) = (\sec x)^2 + 1$

$\sec^2 x + 1$

$\boxed{\text{a) } \sec^2 x + 1}$

b) $\sec(x+1)^2$

c) $\sec(x^2 + 1)$

d) $\sec x^2 + 1$

8) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos^2 x - 1}$.

تعويض مباشر $\frac{0}{0}$ غير معين

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

بالضرب -1

$-1 + \cos^2 x = -\sin^2 x$

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{-\sin x \cdot \sin x} = (-1)(1) = -1$

a) 1

b) ∞

c) 0

$\boxed{\text{d) } -1}$

9) أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(\tan^{-1} x)$.

تركيب

$\lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$

a) ∞

b) $\boxed{1}$

c) 0

d) $-\infty$

Scanned by CamScanner

إذا كانت $f(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = \csc x$

اوجد $(f \circ g)(x)$

$f(\csc x) = \boxed{\csc^2 x - 1}$

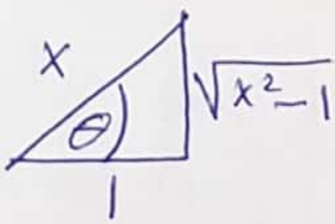
$\boxed{\text{ⓐ } \cot^2 x}$ ⓑ $\tan^2 x$

ⓒ $\sin^2 x$ ⓓ $1 - \sin^2 x$

أوجد $\tan(\sec^{-1} x)$

$\theta = \sec^{-1} x \longleftarrow \sec\theta$

$\sec\theta = \frac{x}{1}$ $\frac{\text{وتر}}{\text{المجاور}}$



$\tan(\theta) = \sqrt{x^2 - 1}$

Scanned by CamScanner

10) أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2-6}{3x^3+2x+1}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2}{3x^3}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

a) 3 b) 2

$\boxed{\text{c) } 0}$ d) ∞

11) حدد الفترة التي تكون عندها الدالة $f(x)=\ln(3x-6)$ متصلة ← مستمرة على مجال

$3x-6>0$

$3x>6$

$\boxed{x>2}$

$(2,\infty)$

a) $(-2,\infty)$ b) $[2,\infty)$

c) $(-\infty,2)$ $\boxed{\text{d) } (2,\infty)}$

12) حدد خطوط التقارب المائلة للدالة $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

شرط وجود خط تقارب مائل درجة البسط أكبر من المقام بواحد

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x-2\,\overline{)\,x^2+0x+1} \\ \mp x^2 \pm 2x \\ \hline 2x+1 \\ \mp 2x \pm 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

الباقي 5

a) $y=-2$ b) $y=2$

$\boxed{\text{c) } y=x+2}$ d) $y=x-2$

b a

t_2 t_1

13) أوجد السرعة المتجهة ~~المتوسطة~~ لدالة الموقع $s(t)=\sqrt{t^2+8t}$ بين $t=0$ و $t=1$

حيث s بالامتار و t بالثواني .

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}$

$= \dfrac{s(1)-s(0)}{1-0}$

$= \dfrac{3-0}{1} = \boxed{3}$

a) $\dfrac{5}{3}$ m/s b) 3 m/s

c) 0 m/s d) $-3\,m/s$

14) إذا كانت $f(x)=2x-x^5+1$ ، أوجد $f''(-1)$.

$f'(x) = 2-5x^4$

$f''(x) = -20x^3$

a) $f''(-1) = -20$ b) $f''(-1)=0$

$\boxed{\text{c) } f''(-1)=20}$ d) $f''(-1)=-3$

$f''(-1) = -20(-1)^3 = \boxed{20}$

Scanned by CamScanner

$\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = 0$

$\infty - \infty$ غير معرف

$\frac{\infty}{\infty}$ غير معرف

$\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = \boxed{0}$

$\infty\,\infty = \infty$

$2\,\infty = \infty$

$-2\,\infty = -\infty$

$-\infty \cdot -\infty = +\infty$

$\infty + \infty = \infty$

أوجد السرعة المتجهة للدالة الموضحة عند $t = 1$ sec

$S(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$

$S'(t) = \frac{2t + 8}{2\sqrt{t^2 + 8t}} = V(t)$

$V(1) = \frac{10}{6} = \boxed{\frac{5}{3}}$

Scanned by CamScanner

15) إذا كانت $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$ ، أوجد $f'(x)$.

$f'(x)=\dfrac{-3(2)}{(2x+1)^2}$

a) $f'(x)=\dfrac{-3}{(2x+1)^2}$ $\quad \dfrac{-6}{(2x+1)^2}$ b) $f'(x)=\dfrac{3}{(2x+1)^2}$

c) $\boxed{f'(x)=\dfrac{-6}{(2x+1)^2}}$ d) $f'(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}$

16) أوجد مشتقة الدالة $f(x)=e^x \cdot \ln x$.

$f'(x)=e^x \ln x+\dfrac{1}{x}\cdot e^x$

a) $f'(x)=xe^x$ $\quad e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x}$ b) $f'(x)=\dfrac{e^x}{x}+e^x\ln x$

c) $f'(x)=\dfrac{e^x}{x}+\ln x$ d) $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$

17) أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^2+2x+1$ في الفترة $[0,1]$.

a b

$f(0)=1 \qquad f(1)=4$

$f'(x)=2x+2$

$f'(c)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$

$2c+2=\dfrac{3}{1}$

$2c=1 \rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}}$

a) 1 b) 0

c) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$ d) $\dfrac{1}{3}$

18) أوجد مشتقة الدالة $f(x)=\cosh^{-1}3x$.

$f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{(3x)^2-1}}$

a) $f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x^2-1}}$ $\quad \dfrac{3}{\sqrt{9x^2-1}}$ b) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $\boxed{f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{9x^2-1}}}$ d) $f'(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{9x^2-1}}$

Scanned by CamScanner

7

إذا كانت $f(x)=x^3+5x+1$ فأجب

① بين أن شروط نظرية القيمة المتوسطة تتحقق $[-1,1]$

② أوجد قيم c التي تحقق النظرية

* f دالة متصلة على $[-1,1]$ لأنها كثيرة حدود
* f دالة قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ " "

إذاً يوجد على الأقل c تقع في $(-1,1)$ تحقق العلاقة $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f(-1)=-5$

$f(1)=7$

$f'(x)=3x^2+5$

$$3c^2+5=\frac{7+5}{1--1}$$

$$3c^2+5=6$$

$$3c^2=1 \rightarrow c^2=\frac{1}{3} \rightarrow \boxed{c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

إذا كانت $f(x)=x^3+5x+1$ فأجب

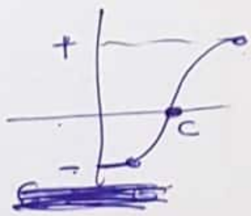
① بين أن شروط نظرية القيمة الوسيطة تتحقق $[-1,1]$

② أوجد قيم c التي تحقق شروط النظرية

* f دالة متصلة على $[-1,1]$ لأنها كثيرة حدود
* $f(-1)=-5<0$ ، $f(1)=7>0$ عددان مختلفان في الإشارة

إذاً يوجد على الأقل c تقع في $[-1,1]$ تحقق

$$f(c)=0$$



$$c^3+5c+1=0$$

$$\boxed{c=-0.198}$$

Scanned by CamScanner

8

التأكد من الاتصال $x=2$

التأكد من الاشتقاق $x=2$

19) حدد الدالة القابلة للاشتقاق عند $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 4x \;\; 8 & , x < 2 \\ x^2 + 4 \;\; 8 & , x \geq 2 \end{cases}$ (4, 2x)

b) $g(x) = \begin{cases} 4 & , x < 2 \\ 2x \;\; 4 & , x \geq 2 \end{cases}$ (0, 2)

c) $p(x) = \begin{cases} 4 + 2x \;\; 8 & , x < 2 \\ 2x \;\; 4 & , x \geq 2 \end{cases}$

d) $h(x) = \begin{cases} 3x \;\; 6 & , x < 2 \\ x + 4 \;\; 6 & , x \geq 2 \end{cases}$ (3, 1)

الدالة غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق $x=2$

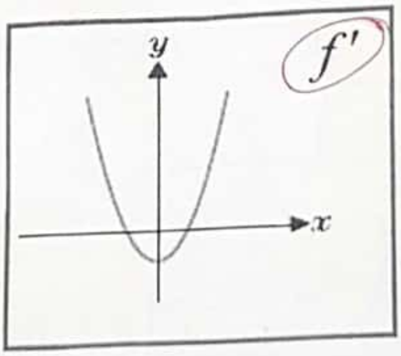
$x=2$ متصلة عند

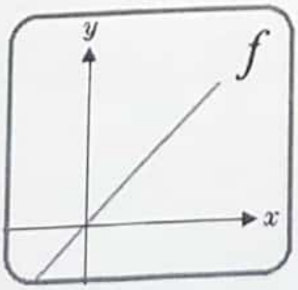
$x=2$ غير قابلة للاشتقاق عند

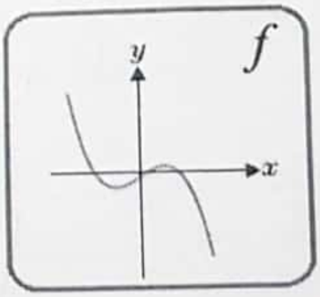
20) استخدم التمثيل البياني أدناه لتحديد التمثيل البياني المعقول للدالة المتصلة f

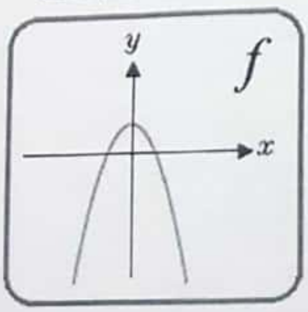
f': دالة من الدرجة الثانية معامل الرئيس موجب

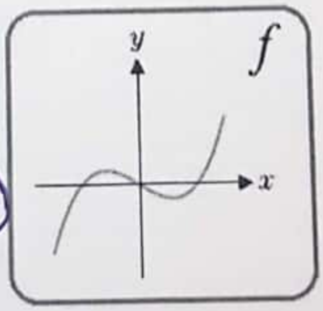
f دالة من الدرجة الثالثة معامل الرئيس موجب



a)


b)


c)


d)


Scanned by CamScanner

60

السؤال الثاني

تكتب خطوات الحل التفصيلية لكافة المفردات الاختبارية من 21 إلى 28

21) أوجد $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{10-x}-3}$.

التعويض المباشر $\frac{0}{0}$

الضرب في مرافق المقام

$\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{10-x}-3} \cdot \dfrac{\sqrt{10-x}+3}{\sqrt{10-x}+3}$

$= \lim_{x\to1} \dfrac{(x^2-1)(\sqrt{10-x}+3)}{10-x-9}$

$= \lim_{x\to1} \dfrac{\cancel{(x-1)}^{-1}(x+1)(\sqrt{10-x}+3)}{\cancel{(1-x)}} = -1(2)(6)$

$= \boxed{-12}$

22) حدد قيم a و b التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة.

$$f(x)=\begin{cases} ae^x+1 & , x<0 \\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2} & , 0\le x\le 2 \\ x^2-x+b & , x>2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

$f(0) = \sin^{-1}(0) = 0$

$f(2) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

① $\lim_{x\to 0^-} (ae^x+1) = f(0)$

$a+1 = 0 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

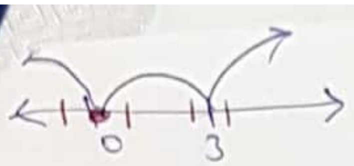
② $\lim_{x\to 2^+} (x^2-x+b) = f(2)$

$4-2+b = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{b = \frac{\pi}{2} - 2}$

Scanned by CamScanner

10



$$f(x) = \begin{cases} a\left[\tan^{-1}(x) + 2\right] & ; x < 0 \\ b\cos\left(x + \frac{1}{3}\right)\pi & ; 0 \le x \le 3 \\ \ln(x-2) + x^2 + 1 & ; x > 3 \end{cases}$$

أوجد قيم a ، b التي تجعل f متصلة

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(b\cos\left(x + \frac{1}{3}\right)\pi\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} a\left[\tan^{-1}(x) + 2\right]$

$$b\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\left[0 + 2\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{2} b = 2a}$$

2) $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(\ln(x-2) + x^2 + 1\right) = \lim\limits_{x \to 3^-} \left(b\cos\left(x + \frac{1}{3}\right)\pi\right)$

$$\ln(1) + 9 + 1 = b\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$10 = -\frac{1}{2} b \qquad \div -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{-20 = b}$$

$$\frac{1}{2}(-20) = 2a$$

$$-10 = 2a$$

$$\boxed{a = -5}$$

Scanned by CamScanner

(23 استخدم تعريف النهاية لإيجاد مشتقة الدالة $f(x)=x^2-2x$ عند $x=3$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3}+4h+h^2-\cancel{3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}}$$

$$=\boxed{4}$$

$$f(3+h)=(3+h)^2-2(3+h)$$

$$=9+6h+h^2-6-2h$$

$$=3+4h+h^2$$

$$f(3)=(3)^2-2(3)$$

$$=3$$

التحقق

$$f'(x)=2x-2$$

$$f'(3)=6-2=\boxed{4}$$

(24 إذا كانت $g(x)$ الدالة العكسية للدالة $f(x)=x^3+2x+1$ ، أوجد $g'(-2)$.

قانون مشتقة معكوس الدالة

$$\boxed{f^{-1}=g}$$

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

$$g'(-2)=\frac{1}{f'(g(-2))}$$

$$g'(-2)=\frac{1}{f'(-1)}$$

$$x^3+2x+1=-2$$

$$x^3+2x+3=0$$

$$x=-1$$

$$f'(x)=3x^2+2$$

$$f'(-1)=3(-1)^2+2=5$$

$$\boxed{g'(-2)=\frac{1}{5}}$$

Scanned by CamScanner

(12)

اذا كانت g معكوس الدالة

$f(x) = x^3 + 2x + 1$

فأوجد $g(13)$

$$g = f^{-1}$$

$$g(13) = f^{-1}(13)$$

$$x^3 + 2x + 1 = 13$$

$$x^3 + 2x - 12 = 0$$

$$\boxed{x = 2}$$

يحقق معكوس الدالة

$$\boxed{g(13) = f^{-1}(13) = 2}$$

محمود مراد 0506565584

Scanned by CamScanner

أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \sqrt{\tan(x^3 + 2x)}$.

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2)\sec^2(x^3+2x)}{2\sqrt{\tan(x^3+2x)}}$$

26) أوجد جميع النقاط (x, y) التي يكون عندها المماس لمنحنى $x^2 . y^2 = 3y + 1$ مماسًا أفقيًا

$f' = m = 0$ دالة ضمنية

$(2x)(y^2) + (x^2)(2yy') = 3y'$

$2xy^2 + 2x^2yy' = 3y' \rightarrow 2xy^2 = 3y' - 2x^2yy'$

$2xy^2 = (3 - 2x^2y)y'$

$$y' = \frac{2xy^2}{3 - 2x^2y} = 0$$ مماس أفقي

$2xy^2 = 0 \rightarrow 2 \neq 0,\ \boxed{x = 0},\ y^2 = 0,\ y = 0$

التعويض بالمعادلة الأصلية

$(0)y^2 = 3y + 1 \rightarrow 0 = 3y + 1$

$y = -\frac{1}{3} \rightarrow (0, -\frac{1}{3})$ مرفوضة

المماس الأفقي يمر بالنقطة $(0, -\frac{1}{3})$ فقط

(14)

اوجد موقع المماسات الأفقية والرأسية للمنحنى

$$x^2 + y^2 - 4y = 5$$

اولاً موقع المماسات الأفقية

$$2x + 2yy' - 4y' = 0 \qquad \div 2$$

$$x + yy' - 2y' = 0$$

$$y'(y-2) = -x \longrightarrow y' = \frac{-x}{y-2}$$

موقع المماسات الأفقية	موقع المماسات الرأسية
$y' = 0$	المقام = 0
$-x = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0}$	$y - 2 = 0$
بالتعويض في الأصلية	$\boxed{y = 2}$
$y^2 - 4y - 5 = 0$	$x^2 + 4 - 8 = 5$
$(y-5)(y+1) = 0$	$x^2 = 9 \longrightarrow x = \pm 3$
$y = 5$, $y = -1$	$(3, 2)$, $(-3, 2)$
$(0, 5)$, $(0, -1)$	

محمود مراد 0506565584

Scanned by CamScanner

15

... سعر بيع القطعة الواحدة من سلعة ما AED 12 وقد بيعت 10,000 قطعة منها.

تريد الشركة زيادة الكمية المبيعة بمقدار 1000 قطعة في العام مع زيادة الإيراد بمقدار AED 15,000 في نفس العام . فما المعدل الذي يتعين به زيادة السعر لتحقيق هذين الهدفين ؟

نفرض أن Q = الكمية ، P = سعر السلعة

R = الإيراد

$R = P \cdot Q$

$R' = P'Q + PQ'$

$15000 = P'(10000) + 12(1000)$

$15000 - 12000 = 10000P'$

$P' = \frac{15000 - 12000}{10000}$

$P' = \frac{3}{10} = 0.3$

$P = 12$

$Q = 10000$

$Q' = +1000$

$R' = 15000$

$P' = ??$

28) إذا كانت f و g دالتين متصلتين في الفترة $[a,b]$ و قابلتين للإشتقاق في الفترة (a,b)

حيث $f(a) = g(a)$ و $f(b) = g(b)$.

فأثبت أن f و g لهما مماسان متوازيان عند نقطة ما في الفترة (a,b).

تحقق نظرية القيمة المتوسطة $[a,b]$

1) f دالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[a,b]$

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = m_1$

2) g دالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[a,b]$

$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = m_2$

اذاً $m_1 = m_2 \Rightarrow$ لهما مماسان متوازيان عند $x = c$

في (a,b)

انتهت الأسئلة

بالتوفيق والنجاح

Scanned by CamScanner