3) النهايات عند اللانهاية :

- لتكن f دالّـــة معرّفـــة في جوار لـ $+\infty$، إذا كانت f تسعى إلى عدد حقيقي ℓ، عندما تسعى x إلى $+\infty$، عندئذٍ نقول إنّ للدالّة f نهاية عند $+\infty$ تساوي ℓ، ونُرمِّز لذلك بـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- لتكن f دالّة معرّفة في جوار لـ $-\infty$، إذا كانت f تسعى إلى عدد حقيقي ℓ، عندما تسعى x إلى $-\infty$، ونرمِّز لذلك بـ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.
- [illegible]:

$$\lim_{x\to-\infty}$$

تجنب كتابة إشارة الضرب في العمليات الحسابية لأنها تشبه حرف X واستعض عنه بالأقواس.

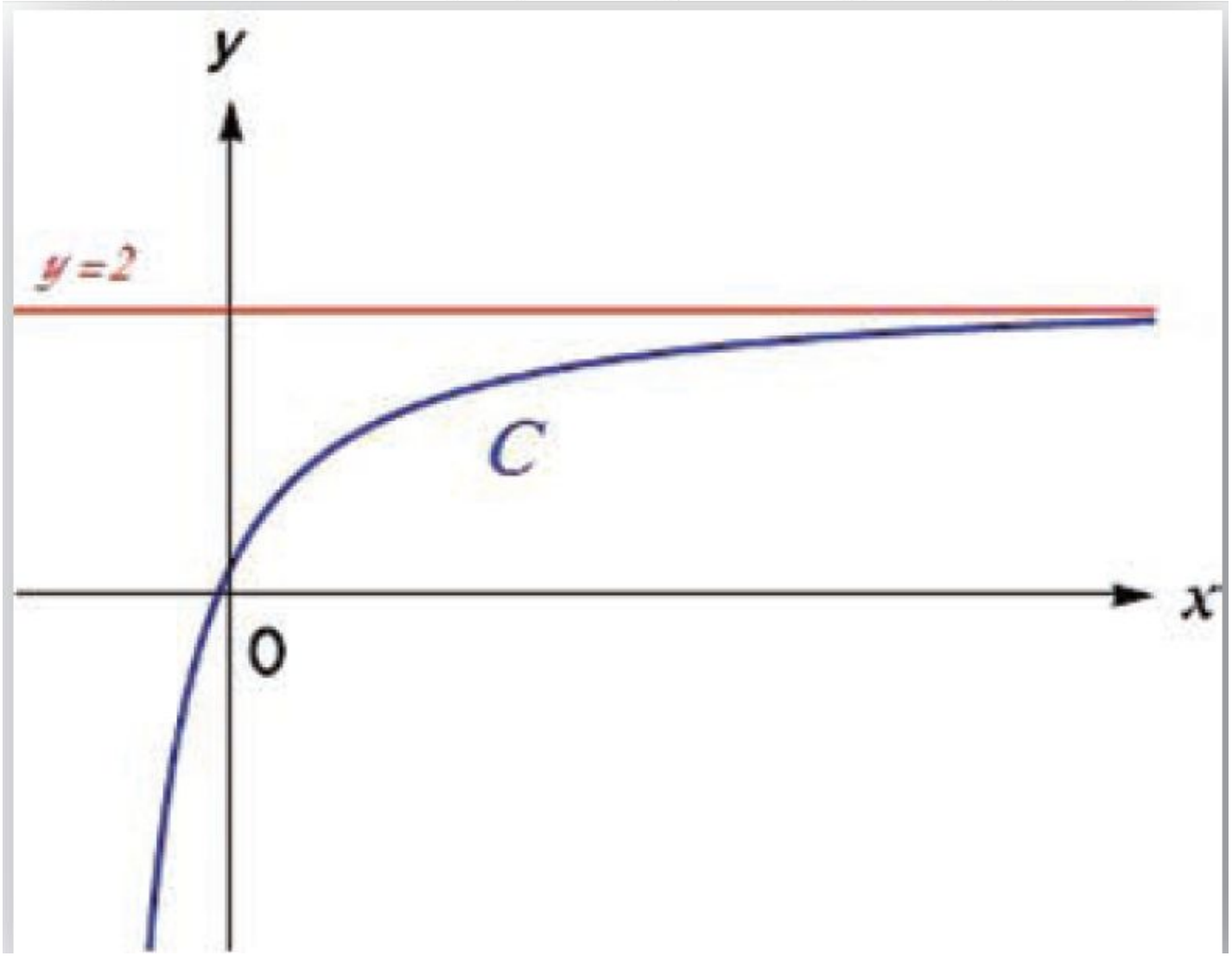
لتكنِ الدالّة f المـ[illegible] $f(x)=\dfrac{2}{x-2}$ أوجد نهايتها عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$

الحل : نكتب في حالة x من $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$: $f(x)=\dfrac{3}{x(1-\frac{2}{x})}=\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{x}}$ فيكون

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\cdot 1=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0\cdot 1=0$$

نشاط 1

في كلّ شكلٍ ممّا يأتي خطّ بيانيّ C لدالّة f , ومستقيم أفقي مقارب ل C املأ الفراغ بما يناسبه فيما يأتي:

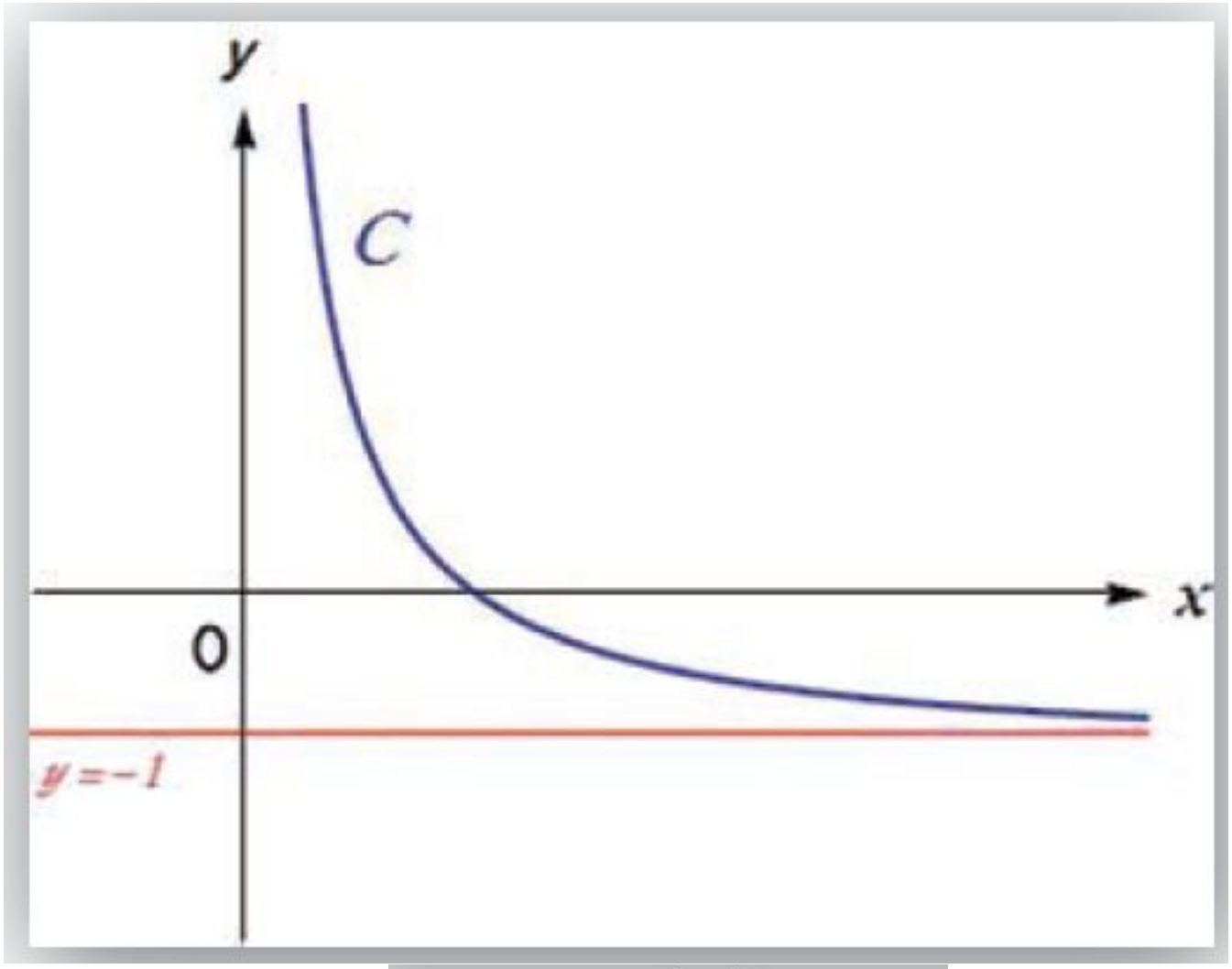


$$\lim_{x \to .+\infty} f(x) = \ldots 2 \ldots$$

Facebook.com/math2013

نشاط 1

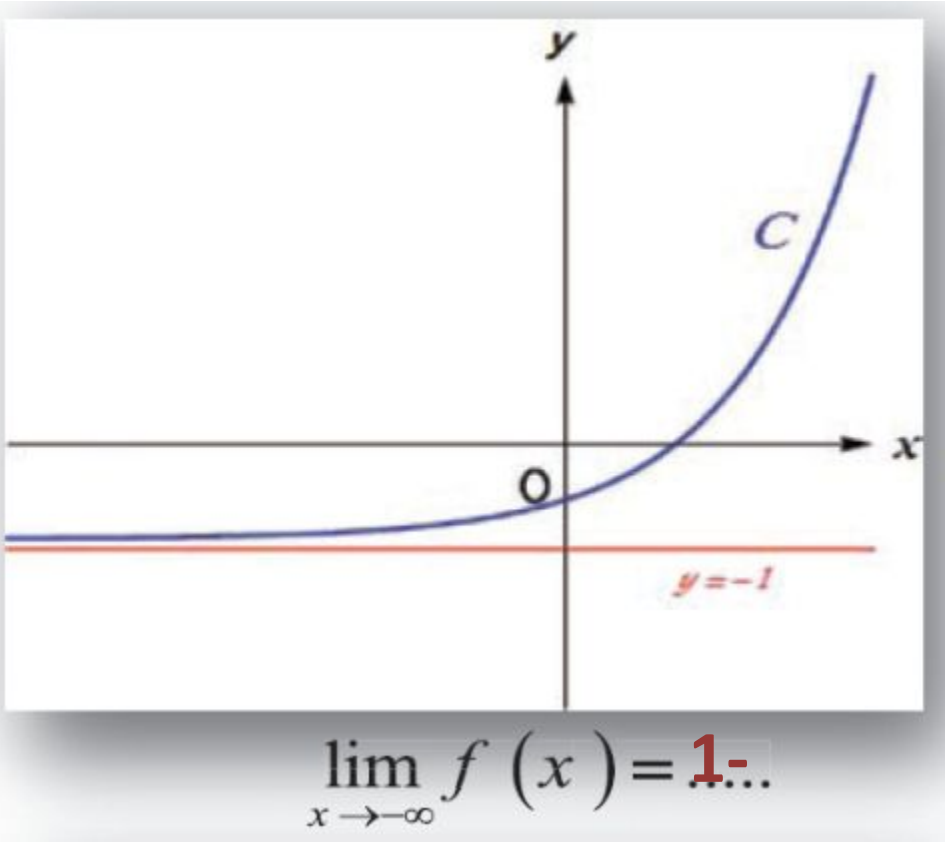
في كلّ شكلٍ ممّا يأتي خطّ بيانيّ C لدالّة f , ومستقيم أفقي مقارب ل C املأ الفراغ بما يناسبه فيما يأتي:



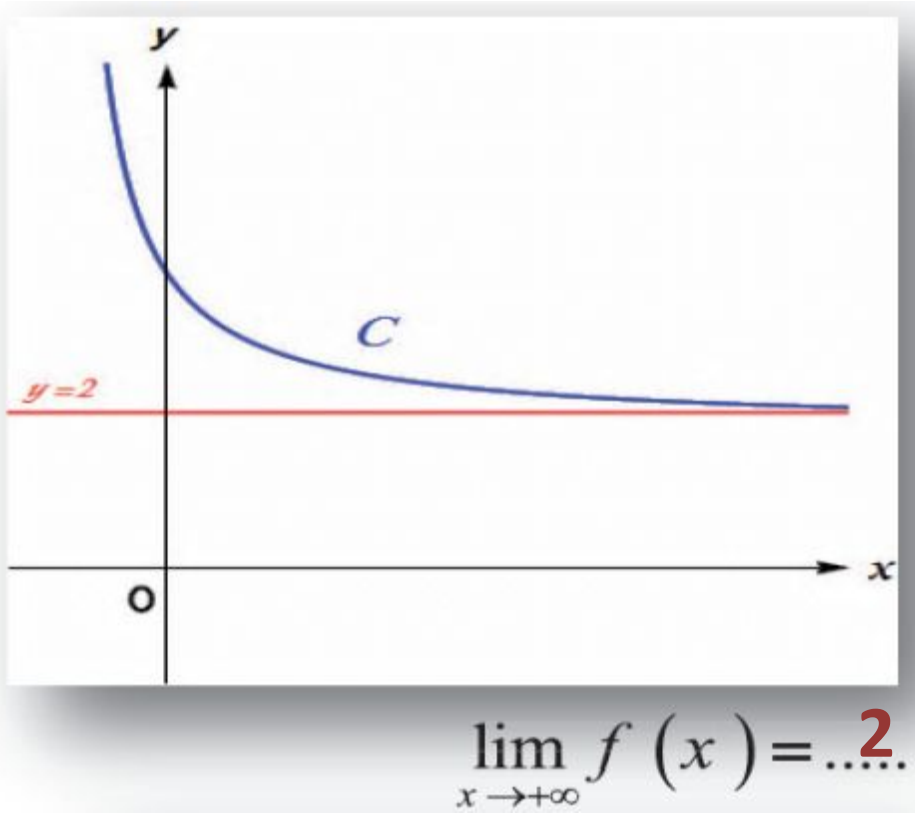
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

نشاط 1

في كلّ شكلٍ ممّا يأتي خطّ بيانيّ C لدالّة f , ومستقيم أفقي مقارب ل C املأ الفراغ بما يناسبه فيما يأتي:



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ldots$ 1-



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$ 2

بَقيَ تمرينين وحلهما مشابه للتمارين السابقة .

نـشـاط 2

فيما يأتي مجموعة من العبارات لكل منها ثلاث إجابات ، واحدة منها فقط صحيحة، اقرأ كلّ عبارة جيداً، و بالتشاور مع زملائك في مجموعتك، ضع دائرة على الرمز الدال على الإجابة التي تختارونها و ترون أنّها صحيحة:

الرقم	العبارة	الرمز	الإجابات المقترحة
1	$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} \right)$	A	$-\infty$
		B	$+\infty$
		C	0

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}x+\frac{1}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\quad=\infty+0=\infty$$

نشاط 2

2

الدالّة f من الدوال المذكورة جانباً, التي تحقّق

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي:

$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$	أ
$f(x)=\frac{3x^4+5x}{x+1}$	ب
$f(x)=\frac{3x^2+5x+1}{x^2}$	ج

هناك طريقة أسهل :نهاية دالة كسرية عند اللانهاية
نأخذ أعلى حد بالبسط ونقسمه على أعلى حد بالمقام
(بهذه الطريقة تنتج الأجوبة بسهولة وسرعة).

$$f(x)=\frac{3x^3}{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{1+\frac{1}{x}}+\frac{5}{1+\frac{1}{x}}=+\quad=\frac{3}{1+\frac{3}{x^2}}+\frac{5}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}+\frac{1}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3+0+0=3 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=3+0+0=3$$

3

إذا كانت f دالّةً زوجيّة ومعرّفة على $\mathbb{R}$

وكانت :

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 3$ فإنّ

A	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -3$
B	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 3$
C	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

تذكر: الدالة الزوجية متناظرة بالنسبة لمحور العينات

4

إذا كانت f دالّةً فرديةً ومعرّفةً على $\mathbb{R}$

وكانت :

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن

A	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0$
B	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
C	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

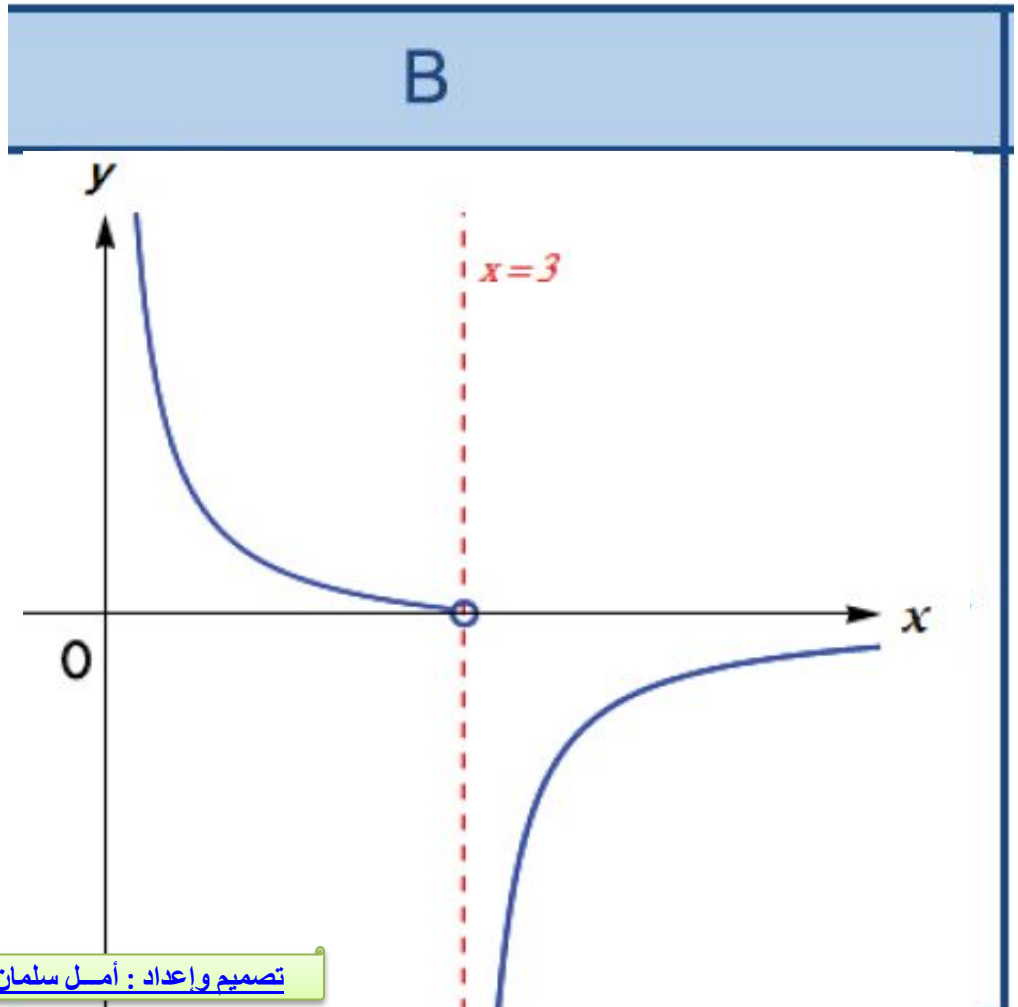
تذكر: الدالة الفردية متناظرة بالنسبة لمحور لمبدأ الاحداثيات

4) النهاية من الشكل : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

لنتذكر القاعدة الآتية، ولنستفدْ منها في حلّ التمارين: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} \frac{1}{x-a}=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} \frac{1}{x-a}=+\infty$

نشاط 3

صل كلّ جواب للنهاية في العمود A مع الخط البياني للدالّة الموافقة في العمود B فيما يأتي:



A	
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x)=0$	الخط البياني رقم (4)
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x)=+\infty$	الخط البياني رقم (1)
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)=+2$	الخط البياني رقم (3)
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x)=0$	الخط البياني رقم (2)

2.1.1 مبرهنة الإحاطة (الدالة المحصورة).

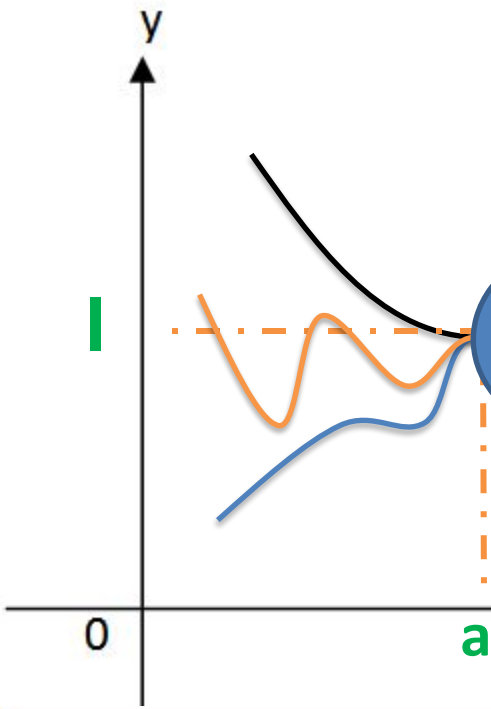
نقبل بصحة المبرهنات الآتية:

مبرهنة1: ليكن D [illegible] $D\setminus\{a\}$ وتحققان : $f(x)\le g(x)$ أياً كان [illegible]

أي إذا كانت (ثلاث دوال مرتبة تصاعديا وكانت نهايتا الكبرى والصغرى متساويتان)فإن (نهاية الوسطى تساوي نهاية تلك الدالتين)

مبرهنة2: ليكن D مجالاً ولتكن f و g و h ثلاث دوالّ معرفة على $D\setminus\{a\}$ وتحقق: في حالة $x\in D\setminus\{a\}$ المتراجحة $g(x)\le f(x)\le h(x)$. إذا كانتِ النهايتان $\lim\limits_{x\to a}h(x)$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ موجودتين ومتساويتين وقيمتُهما المشتركة ℓ كان $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$.

2.1.1 مبرهنة الإحاطة (الدالة المحصورة).



إذا كانت (الدالة الأولى أكبر من الثانية)و(نهاية الكبرى = ∞-)

فإنّ نهاية الصغرى= ∞-

مبرهنة3: ليكن D مجالاً، ولتكن f و g دالتين معرّفتين على $\{a\}$.

1- إذا كان $g(x) \leq f(x)$ وكان $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

ملاحظة: تبقى المبرهنات السابقة صحيحة عندما $a = -\infty$ أو $a = +\infty$

مثال

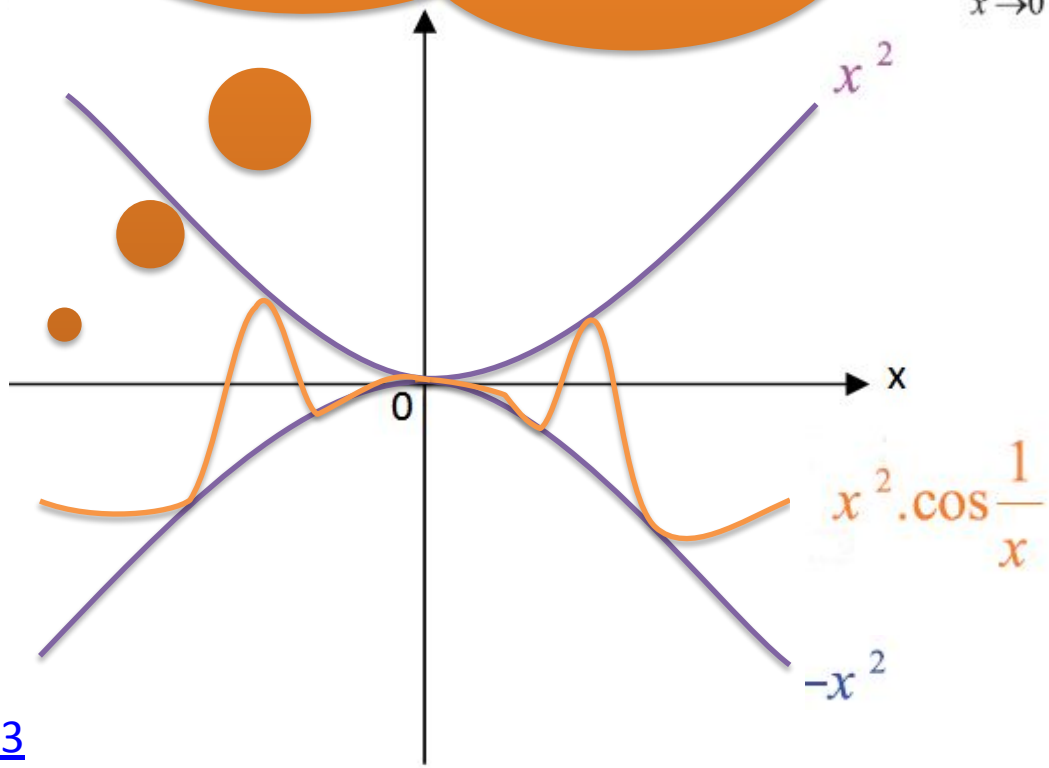
أوجد $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}$

سؤال : ما هي الدالة المحصورة في هذا المثال ؟

$-x^2 \le x^2 \cdot \cos$

$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$ و

$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} = 0$



مـــثـــال2

أوجد نهاية $(x-1)^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$ عند 1

الحل: في حالة $x \neq 1$ لدينا $-1 \leq \cos\frac{1}{(x-1)} \leq +1$ ولأنّ $(x-1)^2 \geq 0$ استنتجنا

$$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2 \cdot \cos$$

$$\lim_{x \to 1}(x-1)^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) =$$

وذلك حسب مبرهنة 1

تصميم وإعداد الدرس : أمـــل سلمان

للمزيد من الدروس : > اضغط هنا <

Aml_987@hotmail.com

ولمّا

$x \to +\infty$